



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS
CURSO DE BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

LAYANE SILVA DE AMORIM

**AUTOVALORES E AUTOVETORES: SIGNIFICAÇÃO NO ESTUDO DAS
VIBRAÇÕES**

PAU DOS FERROS - RN

2017

LAYANE SILVA DE AMORIM

**AUTOVALORES E AUTOVETORES: SIGNIFICAÇÃO NO ESTUDO DAS
VIBRAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a
Universidade Federal Rural do Semi-Árido,
Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros,
como requisito para obtenção do título de
Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientadora: Prof^a. Me. Mônica Paula de Sousa

Co-orientador: Prof. Me. Matheus Fernandes de
Araújo Silva

PAU DOS FERROS - RN

2017

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

A524a Amorim, Layane.

AUTOVALORES E AUTOVETORES: SIGNIFICAÇÃO NO
ESTUDO DAS VIBRAÇÕES / Layane Amorim. - 2017.
40 f. : il.

Orientadora: Mônica Paula de Sousa.
Coorientador: Matheus Fernandes de Araújo Silva.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2017.

1. Autovalor. 2. Autovetor. 3. Significação. 4.
Frequência natural. 5. Modo de vibração. I. Paula
de Sousa, Mônica, orient. II. Fernandes de Araújo
Silva, Matheus, co-orient. III. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

LAYANE SILVA DE AMORIM

**AUTOVALORES E AUTOVETORES: SIGNIFICAÇÃO NO ESTUDO DAS
VIBRAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a
Universidade Federal Rural do Semi-Árido,
Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros,
como requisito para obtenção do título de
Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 09 / 05 / 2017.

BANCA EXAMINADORA


Mônica Paula de Sousa, Prof.^a. Msc. (UFERSA)
Presidente


Matheus Fernandes do Araújo Silva, Prof. Msc. (UFERSA)
Membro Examinador


Crávia Paulino Lavor, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Ser superior por ter me dado a oportunidade de estar vivendo tudo isso e por ter colocado pessoas maravilhosas que me dão força desde o início dessa caminhada, em especial nos últimos meses onde a vontade de desistir tem se apresentado constantemente.

Em segundo, agradeço aos meus pais e ao meu irmão que mesmo com toda a distância nunca me deixaram fraquejar. Obrigada por toda a paciência, ligações e mensagens de incentivo depois das tenebrosas provas. Saibam que tudo que faço é pensando no melhor para vocês.

Em nome das 3 M's: Marlene, Maria Helena e Marilene, agradeço a toda a minha família pelo apoio e incentivo. Sem vocês essa caminha teria sido bem mais difícil.

Aos amigos de longas datas, Lucas D'Jango e Jorge Felipe, por estarem presentes desde o início e em todos os momentos, dos melhores aos mais desesperadores.

Aos gordos, Ires Vieira, Vanerica Alves e Geversson Pinheiro, por toda a irmandade. Obrigada por todos os cuidados, brigas e conversas. Vocês tornaram as coisas bem menos complicadas.

Aos companheiros de início de curso, Cajueiro, Robson, Matheus, Lizandra, Clara, Cachinhos e Felipe, vocês têm um papel importantíssimo nessa conquista!

Ao português com Aline, que me ajudou a fazer com que hoje vocês pudessem entender o que escrevo. Obrigada por toda a paciência e companheirismo.

Ao Pindaíba e a doida Cléo que em ocasiões de extremo estresse me proporcionaram momentos que aliviavam e ajudavam a retomar o foco.

Aos professores Cláwsio Rogério e José Flávio pelas oportunidades e por confiarem no meu potencial. E ao professor Douglas, que mesmo em pouco tempo pode contribuir significativamente com o meu crescimento acadêmico e com o desenvolvimento do trabalho. Obrigada por estarem sempre disponíveis a me ajudar.

A minha orientadora Mônica Paula, que além de se dispor a se aventurar em uma área desconhecida e ser tão disponível, tem uma contribuição significativa na minha formação. Espero me tornar pelo menos um terço da profissional que você é. Desculpa por toda a perturbação.

Ao meu co-orientador Matheus Araújo e ao professor Otávio Paulino, que apareceram como super-heróis e nos ajudaram a dar continuidade ao trabalho. Obrigada por toda a ajuda e contribuição.

Não menos importante, agradeço a Débora Brasil, Zulmira Campelo, Marcia Cristina e Rafaela Lima por toda a paciência, ensinamentos e contribuições na minha formação.

E por fim, agradeço a Arioneide (*In Memoriam*) que durante todo o tempo que estive ao meu lado foi uma mãezona. Lembra quando você disse que nunca esqueceria de mim e do meu nome? Faço das suas palavras, as minhas. Obrigada minha amiga, saudades!

Quem me dera ao menos uma vez
Acreditar por um instante em tudo que existe
E acreditar que o mundo é perfeito
E que todas as pessoas são felizes

Renato Russo

RESUMO

As vibrações estão mais presentes em nosso cotidiano do que possamos imaginar. Nota-se a sua presença em construção civil, corpo humano, instrumentos musicais e entre outros lugares. Buscando verificar a presença dos conceitos de autovalores e autovetores no estudo desse fenômeno, o trabalho teve como objetivo principal identificar se os recursos de álgebra linear que embasam o desenvolvimento de ferramentas computacionais integrariam um embasamento teórico mínimo necessário ao engenheiro. Para isso, realizou-se uma análise semântica de oito trabalhos, sendo esses, relatório de projeto, trabalho de conclusão de curso, dissertação e tese, fundamentada no Modelo dos Campos Semânticos idealizada pelo professor Rômulo Campos Lins. Concluiu-se que, dos oito trabalhos, seis enunciam os dados obtidos em suas produções e os justificam por meios dos significados inerentes aos conceitos da álgebra linear utilizados na elaboração das ferramentas computacionais, refletindo a necessidade dessa disciplina como base teórica mínima indispensável ao engenheiro em suas produções acadêmicas.

Palavras-chave: Frequência natural. Modo de vibração. Autovalor. Autovetor. Significação.

ABSTRACT

The vibrations are more present in our daily lives than we can imagine. Note-If your presence in construction, human body, musical instruments and among other places. Seeking to verify the presence of the concepts of eigenvalues and eigenvectors in the study of this phenomenon, the work had as main objective to identify whether the features of linear algebra that supports the development of computational tools integrated a theoretical minimum required to engineer. For this, an analysis of eight semantics works, being these, project report, completion of course work, dissertation and thesis, based on the Model of Semantic Fields created by professor Romulo Campos Lins. It was concluded that, of the eight works, six are the data obtained in their productions and justify by means of the meanings inherent in the concepts of linear algebra used in preparation of computational tools, reflecting the need for this disc.

Keywords: Natural frequency. Vibration mode. Eigenvalue. Eigenvector. Signification.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Monocórdio	13
Figura 2: Pêndulo simples.	14
Figura 3: Sistema massa mola..	15
Figura 4: Sistema massa mola..	16
Figura 5: Sistema massa mola com dois graus de liberdade..	19
Figura 6: Viga em balanço idealizada como oscilador simples amortecido.....	22
Figura 7: Sistema massa mola.	28

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
2. FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO ASSOCIADOS	13
2.1. Conceitos básicos	14
2.2. Sistemas não amortecidos	16
2.3. Sistemas amortecidos	21
3. PROBLEMAS DE AUTOVALORES E AUTOVETORES.....	25
3.1. Caracterização de Operador Linear	26
3.2. Método geral do cálculo de autovalores e autovetores.....	27
4. SIGNIFICAÇÃO NO ESTUDO DAS VIBRAÇÕES.....	33
4.1. Produções estudadas.....	34
4.2. Análise do processo de produção de significados	35
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	38
REFERÊNCIAS	39

1. INTRODUÇÃO

As vibrações estão mais presentes em nossas vidas do que possamos imaginar. Nota-se a sua existência em diversos objetos e lugares que nos rodeiam, tais como, instrumentos musicais, máquinas, corpo humano, construção civil e etc. O interesse pelo estudo das vibrações se deu através dos instrumentos musicais e se repercutiu conquistando assim diversos estudiosos, tais como: Pitágoras de Samos, Isaac Newton, Galileu Galilei e entre outros (Rao, 2008).

Há pelo menos três décadas, os estudos de vibrações baseavam-se em modelos com um número reduzido de graus de liberdade, tornando-se assim, modelos grosseiros. No entanto, o desenvolvimento da tecnologia proporcionou uma análise mais refinada de sistemas complexos de Engenharia, possibilitando-a utilizar modelos matemáticos para representar o comportamento de estruturas, sejam elas de grande ou pequeno porte, aliado a métodos numéricos de análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade (Venceslau, 2015).

Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo principal identificar se os recursos da álgebra linear que embasam o desenvolvimento de ferramentas computacionais, integrariam um embasamento teórico mínimo necessário ao engenheiro, bem como, identificar os conceitos básicos presentes no estudo das vibrações, justificar a necessidade de entendimento e críticas das soluções obtidas no uso de ferramentas computacionais nesse estudo e verificar a real necessidade dessa disciplina como base teórica mínima necessária ao engenheiro em suas produções acadêmicas.

Assim, intencionou-se disponibilizar um material de auxílio à compreensão de como a interpretação dos conceitos matemáticos facilitam o entendimento dos dados obtidos por ferramentas computacionais, justificando a necessidade da disciplina de Álgebra Linear na grade curricular do futuro engenheiro, uma vez que na maioria dos casos, as ferramentas computacionais são usados para auxiliar no estudo de análises dinâmicas e o engenheiro aparentemente apresenta dificuldades no embasamento teórico necessário à criar significados para as respostas fornecidas, pois como afirma (Brasil, 2015, p.13) “Nós, engenheiros civis, temos sido geralmente formados dentro de uma concepção estática da configuração de nossas estruturas”.

Para isso, o trabalho encontra-se organizado em cinco capítulos, sendo o primeiro a presente introdução, onde foi realizado o enquadramento do tema, abordando os objetivos e a justificativa para a elaboração do mesmo, bem como uma caracterização dos capítulos que o

compõem. Com isso, o Capítulo dois traz uma pequena contextualização e fundamentação teórica acerca dos conceitos e equações necessárias ao seu desenvolvimento.

No Capítulo três são apresentadas definições de espaço vetorial e transformação linear, seguindo uma linha que objetiva atingir os conceitos principais de autovalor e autovetor, que embasam o conhecimento teórico necessário a criar significados para as respostas fornecidas nos problemas de vibração abordados, exibindo exemplos para cada definição e aplicado em análises dinâmicas.

Na sequência, tem-se o Capítulo quatro, onde são apresentados os resultados e discussão obtidos a partir da análise de oito trabalhos acadêmicos por meio do método do Modelo dos Campos Semânticos de Lins, objetivando identificar se os autores possuem embasamento teórico que os possibilitam realizar críticas em relação as respostas obtidas. E no último capítulo, são apresentadas as conclusões gerais do trabalho.

2. FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO ASSOCIADOS

O interesse pelo estudo das vibrações data do período em que foram descobertos os primeiros instrumentos musicais, cerca de mais de 4000 a. C. Pitágoras de Samos, filósofo e matemático grego, considerado o primeiro a investigar sons musicais com base científica, realizou experimentos utilizando um instrumento com uma corda vibratória simples, denominado monocórdio (Rao, 2008).

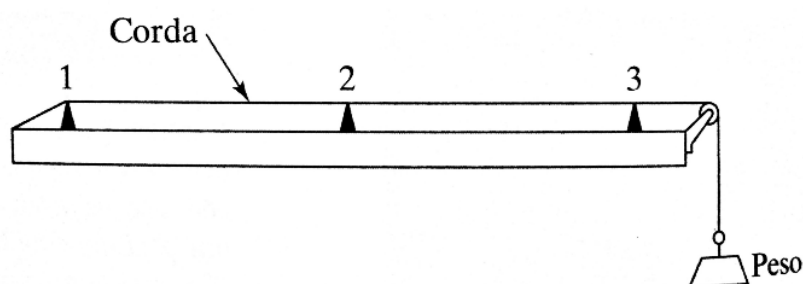


Figura 1: Monocórdio. Fonte: Rao, 2008, p.2.

No século XVII Galileu Galilei teve a ideia de estudar o comportamento de um pêndulo simples através dos movimentos pendulares de uma lâmpada em uma igreja de Pisa. Começou a medir o período dos movimentos com sua própria pulsação e constatou que o período era independente da amplitude das oscilações. Isso o levou a realizar mais experimentos com pêndulo simples (Rao, 2008).

Ainda no século XVII, escreveu sobre vibrações e chegou a publicar um de seus escritos que descrevia a dependência entre a frequência, vibração e o comprimento de um pêndulo simples, juntamente com o fenômeno da ressonância. Também nesses escritos, indicava um claro entendimento da relação entre frequência, tensão, comprimento e densidade de uma corda vibratória esticada (Rao, 2008).

Além de Galileu, diversos estudiosos contribuíram para o desenvolvimento de teorias que vieram a auxiliar no estudo das vibrações, tais como Sauveur, John Wallis, Sir Isaac Newton, Brook Taylor, Daniel Bernoulli, Joseph Lagrange, entre outros. Isso destaca mais ainda a importância da análise dinâmica, além de sua existência em diversos objetos e lugares que nos rodeiam, tais como, instrumentos musicais, máquinas, corpo humano, construção civil e entre outros.

Tal fenômeno, que pode ser definido como o movimento que se repete após um certo intervalo de tempo, ocorre quando se emprega um deslocamento inicial em relação à posição

de equilíbrio, como também, devido a ação de forças externas, denominadas forças de excitação, por exemplo, o balançar de um pêndulo, dito movimento oscilatório (Venceslau, 2015).

A repetição de movimento pode levar a estrutura ou componentes de um sistema físico, como turbinas, por exemplo, a falhar devido à fadiga do material utilizado (Rao, 2008). Assim, a importância do estudo das vibrações pauta-se na busca por reduzi-la utilizando-se de projetos em sistemas, cujas falhas são provocadas devido à sua presença, o que leva a conhecê-la desde sua base, como faremos a seguir.

2.1. Conceitos básicos

Em geral, chamamos de sistemas vibratórios aqueles formados por três elementos: *mola*, responsável por armazenar energia potencial, *massa*, responsável por armazenar energia cinética e *amortecedor*, responsável pela perda gradual de energia (Rao, 2008).

Com isso, o “modelo vibratório é caracterizado pelo deslocamento ao longo do tempo, com a transferência de energia potencial por cinética e vice-versa, resultando em movimento oscilatório” (Venceslau, 2015, p.56). Na figura abaixo, a força atuante no corpo responsável pela tendência de retornar a sua posição inicial é a gravitacional e o ar funciona como o elemento amortecedor, visto que a magnitude da oscilação (θ) é diminuída a cada ciclo devido a sua resistência.

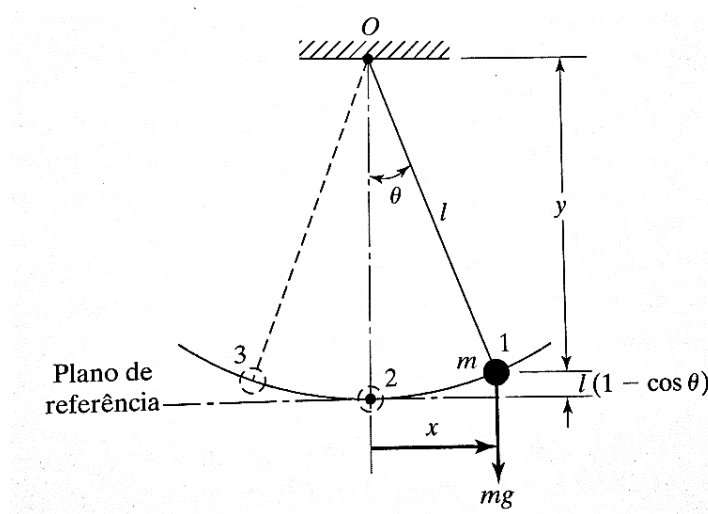


Figura 2: Pêndulo simples. Fonte: Rao, 2008, p. 7.

Para determinar completamente a posição de cada parte do sistema a qualquer instante quando esse está em movimento, é necessário um número mínimo de coordenadas independentes, isso é, é necessário determinar os *graus de liberdade do sistema*.

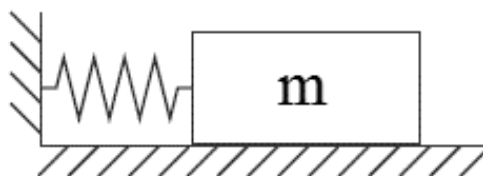


Figura 3: Sistema massa mola. Fonte: Autoria própria.

Na figura 3, a posição do bloco de massa m pode ser representada ao longo de todo o vão pela coordenada x , logo, o sistema possui apenas um grau de liberdade. Com relação a figura 2, observa-se que o sistema também possui apenas um grau de liberdade, pois todas as posições do pêndulo podem ser determinadas pela magnitude de oscilação θ .

Em um sistema oscilatório que possui um ou n graus de liberdade, ao aplicar uma força externa repentina/brusca este passa a vibrar. De acordo com Rao (2008), as vibrações podem ser classificadas de várias maneiras, como pela magnitude de excitação. Porém, se destacam algumas por ter um maior envolvimento com o trabalho. São elas: vibração livre e forçada, vibração amortecida e não amortecida e vibração linear e não linear. Nota-se que a classificação se dá quanto à forma de vibração devido a uma força excitatória, a elementos que compõem o sistema e a linearidade.

Quanto à forma de vibração devido a uma força excitatória, podemos classificar as vibrações em livres e forçadas. “Se um sistema, após uma perturbação inicial, continuar a vibrar por conta própria, a vibração resultante é conhecida como *vibração livre*” e “se um sistema estiver sujeito a uma força externa (muitas vezes, uma força repetitiva), a vibração resultante é conhecida como *vibração forçada*” (Rao, 2008, p.8).

Como já foi mencionado, no movimento oscilatório o sistema armazena energia, e, se no sistema não houver a presença do elemento amortecedor para que a energia seja dissipada, a vibração é conhecida como *vibração não amortecida*. Por outro lado, se houver a presença do elemento amortecedor e qualquer energia for dissipada, ela é denominada *vibração amortecida* (Rao, 2008). Aqui, as vibrações são classificadas quanto à composição do sistema.

Já em relação à linearidade, Rao (2008) define que se os elementos do sistema (massa, mola e amortecedor) comportam-se linearmente, então a vibração é dita linear. Já, se os

elementos se comportam de forma não linear, a vibração é dita não linear. Em análises dinâmicas desenvolvidas na prática as vibrações são não lineares, pois as *amplitudes de vibração*, que é “o máximo deslocamento de um corpo vibratório em relação á sua posição de equilíbrio” (Rao, 2008, p.25), crescem gradativamente.

Visto esses conceitos já se pode começar a entender como a repetição de movimento leva o sistema a falhar. A peculiaridade importante é que ao coincidir a *frequência de oscilação*, ou seja, “o número de ciclos por unidade de tempo” (Rao, 2008, p.25), da força externa com uma das *frequências naturais* do sistema, entendido como o número de ciclos por unidade de tempo em que o sistema vibra após a perturbação inicial ser retirada, ocorre o chamado fenômeno físico da ressonância, responsável por tais falhas em estruturas, máquinas e outros (Rao, 2008).

Assim, é necessário conhecer como se descreve matematicamente esse movimento naturalmente descrito por equações diferenciais ordinárias obtidas a partir da aplicação das leis básicas da Física.

2.2. Sistemas não amortecidos

Observando que a equação do movimento de um sistema dinâmico básico resulta das equações de Newton-Euler (Silva, 2009), considera-se um sistema constituído por dois elementos: *massa* e *mola* e com *um grau de liberdade* caracterizando um sistema não amortecido, visto que, há a ausência do elemento amortecedor.

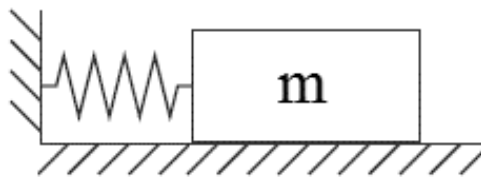


Figura 4: Sistema massa mola. Fonte: Autoria própria.

Para encontrar a equação do movimento que governa esse tipo de sistema, considera-se que uma força $f(t)$ age sobre o sistema. Assim, pode-se utilizar a segunda lei de Newton para obter a equação do movimento. Com isso, tem-se:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f(t), \quad (1)$$

onde m é a massa do bloco, $\ddot{u}(t)$ a aceleração, k a rigidez da mola, $u(t)$ o deslocamento como função do tempo t e $f(t)$ é a força externa aplicada. E,

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \Rightarrow a_1 = u_0 \\ \dot{u}(0) &= v_0 \Rightarrow a_2 = \frac{v_0}{\omega_n} \end{aligned}$$

são as condições de contorno do problema.

Nota-se que (1) é uma equação diferencial ordinária (EDO) com coeficientes constantes, não homogênea e de ordem 2. Visando a obtenção da solução geral para (1), uma das técnicas é tomar a soma da solução homogênea $u_h(t)$ e da solução particular $u_p(t)$. Assim, para obter-se $u_h(t)$, tem-se a equação homogênea associada

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2)$$

Aqui, percebe-se que é uma EDO linear, pois não se tem potência de u ou de suas derivadas diferente de um. Assim, pode-se dividir (2) por m obtendo a forma padrão de EDO's desse tipo,

$$\ddot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0 \quad (3)$$

onde $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência natural angular.

Observando-se que nesse tipo de equação procura-se por funções cuja derivada segunda seja um múltiplo da própria função, ver-se que a solução para essa EDO é do tipo $u(t) = Ae^{\lambda t}$ ou $u(t) = \cos \lambda t$, resultando nas seguintes soluções:

$$u_1(t) = a_1 \cos(\omega_n t) \quad (4)$$

$$u_2(t) = a_2 \sin(\omega_n t) \quad (5)$$

A soma de (4) e (5) forma a solução completa para (2), então,

$$u_h(t) = a_1 \cos(\omega_n t) + a_2 \sin(\omega_n t) \quad (6)$$

Substituindo o valor de cada constante obtidas a partir da aplicação das condições de contorno em (6), tem-se a solução homogênea completa:

$$u_h(t) = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (7)$$

Após determinada a solução homogênea do sistema, é necessário determinar a solução particular $u_p(t)$, para isso considera-se que a força que age sobre o sistema é uma *força harmônica*¹

¹ Entendida como aquela “expressa por cosseno ou por seno, com ou sem ângulo de fase” (Soriano, 2014, p. 73), onde este indicaria o quanto antes em radianos anteciparia um máximo na amplitude no movimento caso este ângulo fosse adicionado à velocidade angular.

$$f(t) = f_o \cos(\omega t), \quad (8)$$

Assim, substituindo $f(t)$ em (1):

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f_o \cos(\omega t) \quad (9)$$

Supondo que a solução particular é da forma

$$u_p(t) = a_p \cos(\omega t) \quad (10)$$

é necessário derivar duas vezes para encontrar $\ddot{u}_p(t)$, obtendo

$$\dot{u}_p(t) = -a_p \omega \sin(\omega t) \quad (11)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -a_p \omega^2 \cos(\omega t) \quad (12)$$

substituindo as soluções particulares e f_o em (9), tem-se

$$m(-a_p \omega^2 \cos(\omega t)) + k(a_p \cos(\omega t)) = f_o \cos(\omega t) \quad (13)$$

O termo $\cos(\omega t)$ é comum em todas as parcelas da equação, sendo assim, a equação (13) reduz-se a:

$$-a_p m \omega^2 + a_p k = f_o, \quad (14)$$

colocando a_p em evidência, tem-se:

$$a_p(k - m \omega^2) = f_o. \quad (15)$$

Isolando a_p e colocando $\frac{f_o}{k}$ em evidência, tem-se:

$$a_p = \frac{f_o}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m}{k} \omega^2}$$

Lembrando que $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, então

$$a_p = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{f_o}{k}$$

Assim a solução particular vira:

$$u_p(t) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cos(\omega t) \frac{f_o}{k}$$

Aplicando as condições de contorno:

$$u(0) = u_0 \Rightarrow a_1 = u_0 - \frac{f_o/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

$$u'(0) = v_0 \Rightarrow a_2 = \frac{v_0}{\omega_n}$$

Então, a solução geral para (1) seria:

$$u(t) = u_0 - \frac{f_0/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \frac{f_0/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \cos(\omega t) \quad (16)$$

Nota-se que com $\omega = \omega_n$ a solução particular fica indeterminada e a amplitude tende ao infinito à medida que a frequência forçante se aproxima da frequência natural. Além disso, é possível perceber que não é um trabalho simples obter a solução de uma EDO analiticamente, principalmente por que os sistemas de Engenharia geralmente envolvem vários graus de liberdade, o que indica a abordagem matricial um caminho facilitador.

Verificando-se inicialmente para aplicações em modelos com *dois graus de liberdade*, com o seguinte sistema:

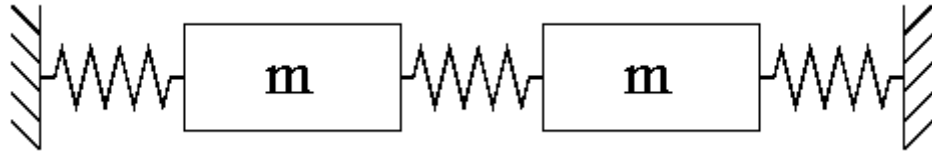


Figura 5: Sistema massa mola com dois graus de liberdade. Fonte: Autoria própria.

Fazendo o equilíbrio para o bloco 1

$$-k_1 u_1 - k_2(u_1 - u_2) - \ddot{u}_1 m_1 + f_1(t) = 0 \quad (17)$$

e para o bloco 2

$$k_2(u_1 - u_2) - u_2 k_3 - \ddot{u}_2 m_2 + f_2(t) = 0, \quad (18)$$

rearranjando os termos:

$$k_1 u_1 + k_2(u_1 - u_2) + \ddot{u}_1 m_1 = f_1(t) \quad (19)$$

$$-k_2(u_1 - u_2) + u_2 k_3 + \ddot{u}_2 m_2 = f_2(t) \quad (20)$$

e usando a distributividade, tem-se

$$k_1 u_1 + k_2 u_1 - k_2 u_2 + \ddot{u}_1 m_1 = f_1(t) \quad (21)$$

$$-k_2 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_2 + \ddot{u}_2 m_2 = f_2(t) \quad (22)$$

Novamente rearranja-se os termos para obter

$$u_1(k_1 + k_2) - u_2 k_2 + \ddot{u}_1 m_1 = f_1(t) \quad (23)$$

$$-u_1 k_2 + (k_2 + k_3)u_2 + \ddot{u}_2 m_2 = f_2(t) \quad (24)$$

que matricialmente seria

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

e escrevemos como

$$Ku + M\ddot{u} = f, \quad (26)$$

onde os termos referem-se a matriz de rigidez K , vetor deslocamento u , matriz de massa M , vetor aceleração $\ddot{u}$ e o vetor de força f , respectivamente. Para o caso de vibração livre não amortecida seria

$$Ku + M\ddot{u} = 0. \quad (27)$$

Essa equação admite uma solução semelhante às apresentadas anteriormente, o que é mais facilmente percebido se sair da abordagem na reta com duas EDO's de segunda ordem com coeficientes constantes para duas EDO's de primeira ordem no plano (Doering e Lopes, 2014), ou seja, introduzimos a variável bidimensional (u_j, y_j) com $y_j = \dot{u}_j$ e obtendo

$$\begin{cases} \dot{u}_j(t) = y_j(t) \\ \dot{y}_j(t) = -m_j^{-1} k_j u_j(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_j(t) \\ y_j(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m_j^{-1} k_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j(t) \\ y_j(t) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

donde, para o sistema com vibração livre, é possível ver como a solução é escrita na forma vetorial

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^{(1)} \\ f_0^{(2)} \end{bmatrix} \cos(\omega_{n_j} t), \quad (29)$$

que corresponde na reta, a forma analítica

$$u(t) = \sum_{j=1}^2 f_0^{(j)} \cos(\omega_{n_j} t). \quad (30)$$

Derivando duas vezes a solução acima se obtém

$$\ddot{u}(t) = - \sum_{j=1}^2 f_0^{(j)} \omega_{n_j}^{(2)} \cos(\omega_{n_j} t) \quad (31)$$

que vetorialmente

$$\ddot{u}(t) = - \begin{bmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{bmatrix} \omega_{n_j}^{(2)} \cos(\omega_{n_j} t), \quad (32)$$

e substituindo $u(t)$ e $\ddot{u}(t)$ na equação do movimento,

$$K \begin{bmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{bmatrix} \cos(\omega_{n_j} t) - M \begin{bmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{bmatrix} \omega_{n_j}^2 \cos(\omega_{n_j} t) = 0, \quad (33)$$

reorganizando os termos e colocando os que são comuns em evidência, a equação torna-se

$$\left(K - M \omega_{n_j}^2 \right) \begin{bmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{bmatrix} \cos(\omega_{n_j} t) = 0 \quad (34)$$

donde,

$$\left(K - M \omega_{n_j}^2 \right) f_0 = 0 \quad (35)$$

$$K f_0 = M \omega_{n_j}^2 f_0 \quad (36)$$

$$M^{-1} K f_0 = \omega_{n_j}^2 f_0 \quad (37)$$

uma vez que a matriz de massa M é do tipo diagonal com elementos não nulos em sua diagonal, o que a torna invertível.

Percebendo-se dessa forma, que essa equação caracteriza um problema de autovalor e autovetor, ou seja, $Ax = \lambda x$ com A uma matriz quadrada, x um vetor de coordenadas e λ um escalar, termos estes que definiremos no próximo capítulo.

Assim, ver-se que esse movimento passível de um processo de ressonância, naturalmente descrito por EDO's, pode ser abordado usando conhecimentos da teoria matricial, mesmo se o sistema for amortecido, como se passa a apresentar.

2.3. Sistemas amortecidos

O sistema da figura abaixo difere do sistema não amortecido apenas pela introdução do elemento de amortecimento, o mesmo acontece para a equação do movimento para esse sistema.

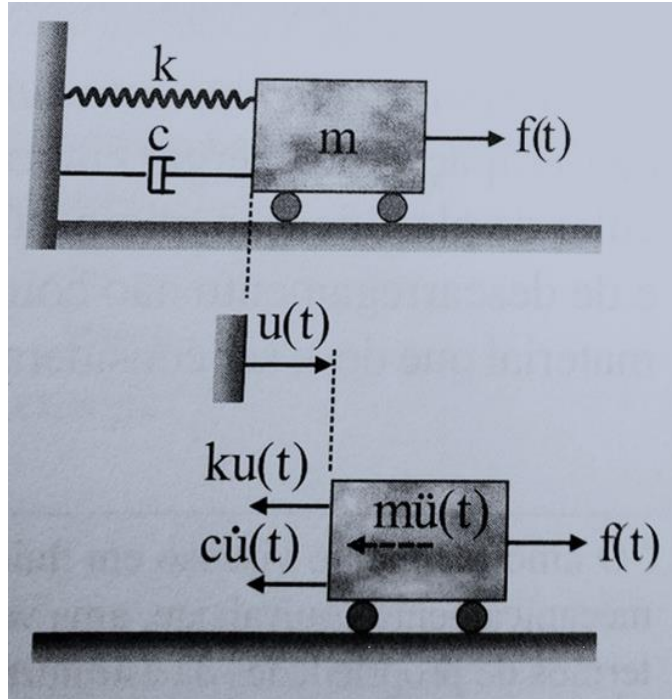


Figura 6: Idealização de uma viga em balanço como oscilador simples amortecido. Fonte: Soriano, 2014, p.76

Fazendo o equilíbrio das forças para o sistema acima, tem-se a equação que rege esse movimento, dada seguinte forma:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (38)$$

Nota-se em (38), como no caso não amortecido, uma equação diferencial ordinária (EDO), com coeficientes constantes, não homogênea e de segunda ordem. A solução completa também seria $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$, donde a equação do movimento particulariza-se para a forma homogênea

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k(u)t = 0 \quad (39)$$

para obter $u_h(t)$, admitindo a solução:

$$u(t) = Ae^{\lambda t} \quad (40)$$

$$\dot{u}(t) = A\lambda e^{\lambda t} \quad (41)$$

$$\ddot{u}(t) = \lambda^2 Ae^{\lambda t}, \quad (42)$$

denominada resposta livre amortecida, em que A e λ são constantes a serem determinadas, como visto anteriormente no caso não amortecido.

Logo, com a substituição das soluções na equação anterior e o cancelamento dos fatores comuns, obtém-se a equação característica $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, que pode ser reescrita como

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0. \quad (43)$$

A equação acima pode ser solucionada utilizando a formula de Bhaskara, obtendo

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (44)$$

Para o caso (2), a solução final da equação do movimento é da forma:

$$u_h(t) = b_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + b_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t}. \quad (45)$$

$$u_h(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left(b_1 e^{\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + b_2 e^{\left(-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \right) \quad (46)$$

destacando que, dependendo do coeficiente de atrito do meio c e da constante de elasticidade da mola k (rigidez), pode-se ter:

- 1) Radicando nulo, $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$, dito amortecimento crítico;
- 2) Radicando maior que zero, $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$, com duas raízes reais e distintas, dito amortecimento supercrítico;
- 3) Radicando menor que zero, $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$, com raízes imaginárias, dito amortecimento subcrítico.

Assim, a natureza da solução homogênea $u_h(t)$ depende do amortecimento, sendo um termo transitório, ou seja, precisa-se determinar a solução em cada caso, para só depois usar a relação de Euler e ter a representação em termos de senos e cossenos e calcular as constantes a partir das condições de contorno.

A solução particular $u_p(t)$ é um termo permanente na soma, e da mesma forma que acontece em sistemas não amortecidos, considera-se a *força harmônica* como a força que age sobre o sistema,

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f_o \cos(\omega t) \quad (47)$$

Supondo como forma da solução

$$u_p(t) = a_p \cos(\omega t), \quad (48)$$

derivando duas vezes, substituindo as soluções particulares em (48) e fazendo as manipulações necessárias para obter

$$u_p(t) = \frac{f_0/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(c \frac{\omega}{k}\right)^2}} \cos(\omega t). \quad (49)$$

Então, a solução geral para (38) é

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left(b_1 e^{\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + b_2 e^{\left(-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \right) + \frac{f_0/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(c \frac{\omega}{k}\right)^2}} \cos(\omega t) \quad (50)$$

onde a primeira parcela da soma depende da natureza do amortecimento.

Ver-se, semelhantemente ao ocorrido em sistemas não amortecidos, que a abordagem matricial torna os cálculos mais sistemáticos, uma vez que gera sempre um sistema de equações diferenciais de segunda ordem com uma equação para cada grau de liberdade, obtidas após os cálculos da energia cinética e potencial do sistema, que podem ser representadas matricialmente por

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f, \quad (51)$$

onde os termos referem-se a matriz de massa M , vetor aceleração $\ddot{u}$, matriz de amortecimento C , vetor velocidade $\dot{u}$, matriz de rigidez K , vetor deslocamento u e o vetor de força f , respectivamente.

E a solução

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad (52)$$

sempre terá elementos constantes (as amplitudes) e termos comuns envolvendo senos e cossenos como visto para sistemas não amortecidos, além da matriz de massa M ser invertível, tornando sempre possível chegar a forma $Ax = \lambda x$ com A a matriz dinâmica do sistema, x o vetor dos modos de vibração e λ as frequências naturais (Silva, 2009).

Com isso ver-se a presença de matrizes na construção e consequentemente na resolução de tais equações, o que, tendo em vista alguns conceitos de vibração, permite aplicar conceitos da Álgebra Linear em análises estruturais de sistemas vibratórios, ou seja, “os efeitos deste conceito devem ser utilizados na análise estrutural” (Valiente, 2015, p. 61).

3. PROBLEMAS DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Na análise dinâmica de estruturas é comum deparar-se com problemas envolvendo o uso de sistemas lineares que matricialmente dão origem ao cálculo sistemático de *autovalores* e *autovetores* (Valiente, 2015). Porém, antes de iniciar o conceito e o cálculo destes, é necessário conhecer sua origem vinda do conceito de *transformação linear*, que pode ser definida como uma função entre *espaços vetoriais*, conjunto de elementos que são chamados de vetores e têm duas operações que definem as suas propriedades, a primeira chamada de soma de vetores e a segunda, de multiplicação por escalar, onde esse escalar é pertencente ao conjunto dos números reais (Kolman, 2013). Formalmente,

Definição 1. Seja V um conjunto não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de adição e multiplicação por escalar, isto é,

- a) $u + v \in V, \forall u, v \in V$
- b) $\alpha u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V.$

O conjunto V é chamado de *espaço vetorial real* (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem verificados os seguintes axiomas:

- 1) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$
- 2) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$
- 3) $\exists 0 \in V$ tal que $u + 0 = u, \forall u \in V$
- 4) $\forall u \in V, \exists (-u) \in V$ tal que $u + (-u) = 0$
- 5) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
- 6) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
- 7) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- 8) $1u = u$

onde u, v e w elementos de V e α e β números reais.

Satisfeito isso, diz-se que u, v e w são vetores pertencentes ao espaço vetorial V e α e β são escalares pertencentes ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Dentre muitos conjuntos que satisfazem essas características podemos citar o plano cartesiano e suas generalizações, os espaços das ênuplas ordenadas.

EXEMPLO 1: conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um número real usuais, assim como, a verificação dos oito axiomas é válida.

EXEMPLO 2: Os conjuntos $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Depois de verificados os oito axiomas de espaço vetorial para o exemplo acima, os mesmos ficam evidentes nos conjuntos acima citados.

Além desses, o conjunto das matrizes M_n de ordem $n \times n$ também é um espaço vetorial e por essa razão tem toda a praticidade de soma e produto por escalar que satisfazem tais axiomas. Isso, aliado ao fato de que todo sistema linear pode ser representado como uma multiplicação de matrizes,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

permite que problemas da realidade, em particular das frequências naturais, possam ser abordados via matrizes, como visto no capítulo anterior, já que a essência dos sistemas estruturais nasce em equações que tem uma solução comum, ou seja, são sistemas lineares, no caso de EDO's.

Agora, como toda matriz pode ser associada a uma função com características particulares e qualquer função desse tipo pode ser representada por uma matriz, há o que se denomina de correspondência biunívoca entre esses espaços vetoriais, isto é

$$A \in M_n \leftrightarrow T(x) = Ax, x \in \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n.$$

Tais funções são ditas transformações lineares e um caso particular destas são os operadores lineares, espaço onde se configuram os problemas de autovalores e autovetores. Por isso que para se resolver sistemas lineares, como os obtidos no capítulo anterior, pode-se recorrer a abordagem matricial associada aos operadores lineares cuja característica está em associar cada vetor a outro de amplitude maior ou menor.

3.1. Caracterização de Operador Linear

No que segue, tem-se a definição formal de transformação linear:

Definição 2. Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T: V \rightarrow W$ é chamada *transformação linear* de V em W se:

- a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- b) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

para $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Onde u, v são vetores pertencentes ao espaço vetorial V e α é um escalar pertencente ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

EXEMPLO 3: Toda transformação matricial é uma transformação linear. Como toda transformação matricial $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é definida por $T(u) = Au$, onde A é a matriz $m \times n$ associada a T , obtendo que

- (a) se $u, v \in \mathbb{R}^n$, então $T(u + v) = A(u + v) = Au + Av = T(u) + T(v)$;
- (b) se $u \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$, então $T(cu) = A(cu) = cAu = cT(u)$.

A partir disso passa-se a um conjunto mais restrito, uma transformação linear cujo contradomínio seja igual ao domínio (operador linear), onde se pode encontrar de maneira simples e sistemática seus autovalores e autovetores, pois, sempre temos uma matriz conhecida associada a uma transformação linear (Kolman, 2013).

Em outras palavras, uma transformação linear de V em V (é o caso de $V = W$) é chamada *operador linear* sobre V . Sendo assim, através da seguinte definição, ganha-se o que é conhecido como *autovalor* e *autovetor*.

Definição 3. Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $x \in V$, $x \neq 0$, é o autovetor do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(x) = \lambda x$. O número real λ tal que $T(x) = \lambda x$ é denominado autovalor de T associado ao autovetor v .

Assim, desejando obter seus autovalores e autovetores pode-se resolver um sistema homogêneo (com forma padrão) utilizando a matriz do sistema e logo em seguida calcular o determinante e obter os seus autovalores, com isso, retornar ao sistema e encontrar os autovetores associados (Kolman, 2013), como se ver na próxima seção.

3.2. Método geral do cálculo de autovalores e autovetores

Como há uma correspondência biunívoca entre os operadores lineares e as matrizes, o método geral consiste em abordar o problema não na forma

$$Tx = \lambda x,$$

mas na forma matricial

$$Ax = \lambda x,$$

onde A é a matriz do operador linear. Assim, reescrevendo a equação acima tem-se

$$Ax - \lambda x = 0.$$

Tendo em vista que $x = Ix$, onde I é a matriz identidade, pode-se escrever

$$Ax - \lambda Ix = 0$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I)x = 0.$$

Para que o sistema homogêneo acima admita soluções não nulas, isto é: $x \neq 0$, deve-se ter:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

denominada *equação característica* da matriz A e suas raízes são os autovalores de A . E o $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ denominado *polinômio característico*. Além disso, a substituição de λ pelos seus valores no sistema homogêneo $(A - \lambda I)x = 0$ permite determinar os autovetores associados.

Com isso, o objetivo consiste em encontrar a matriz associada ao operador que caracteriza o sistema em estudo, ou seja, a equação do movimento da estrutura configura um operador que associa a cada estado da estrutura o estado modificado pelas ações externas que agem sobre ela. Sendo assim, tomando a matriz associada e calculando seus autovalores e autovetores, é mostrada a maneira com que o estado inicial da estrutura se altera apenas em magnitude.

De forma mais clara e para um melhor entendimento, tem-se o exemplo a seguir:

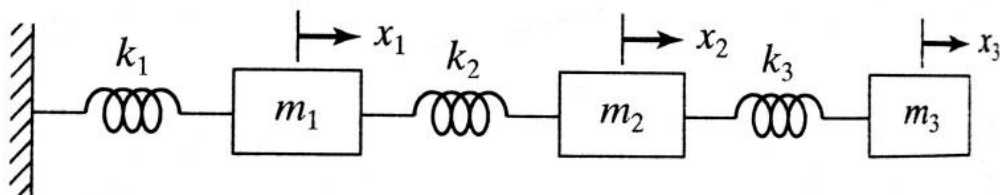


Figura 7: Sistema massa mola. Rao, 2008, Figura 6.8(a), p. 214.

Para o sistema mostrado na figura acima, será determinado as frequências naturais e formas modais. Considerando-se $k_1 = k_2 = k_3 = k$ e $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

Há vários métodos para se resolver um problema de autovalor, mas, para a solução desse problema será utilizado o método descrito acima. Primeiro passo é encontrar a matriz dinâmica do nosso sistema, que pode ser encontrada a partir da equação (35) expressa como

$$(\lambda K - M)x = 0 \quad (53)$$

onde

$$\lambda = \frac{1}{\omega_{n_j}^2}. \quad (54)$$

Multiplicando a equação (53) por K^{-1} , tem-se

$$\lambda x = Dx \quad (55)$$

onde

$$D = K^{-1}M, \quad (56)$$

sendo denominada *matriz dinâmica*. O problema de autovalor da equação (53) é o já mencionado anteriormente e buscando uma solução não trivial de x , calcula-se o determinante igualando a zero, isto é,

$$\Delta = |\lambda I - D| = 0 \quad (57)$$

Para esse exemplo, tem-se que a matriz dinâmica é dada por

$$D = K^{-1}M = AM \quad (58)$$

onde $A = K^{-1}$ é a *matriz de flexibilidade, inversa da matriz de rigidez*, ou seja, é quadrada e o produto das duas é igual a matriz identidade (I) de mesma ordem. Admitindo que as matrizes de rigidez e de massa são da seguinte forma

$$A = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$M = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Assim,

$$D = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (61)$$

e se obtêm a equação da frequência, que é o polinômio característico da matriz D ,

$$\Delta = |\lambda I - D| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{m}{k} & -\frac{m}{k} & -\frac{m}{k} \\ -\frac{m}{k} & \lambda - \frac{2m}{k} & -\frac{2m}{k} \\ -\frac{m}{k} & -\frac{2m}{k} & \lambda - \frac{3m}{k} \end{vmatrix} = 0 \quad (62)$$

Dividindo a equação acima por λ , já que não altera a igualdade $\Delta = 0$ e simplifica os cálculos, tem-se

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{m}{k\lambda} & -\frac{m}{k\lambda} & -\frac{m}{k\lambda} \\ -\frac{m}{k} & 1 - \frac{2m}{k\lambda} & -\frac{2m}{k\lambda} \\ -\frac{m}{k\lambda} & -\frac{2m}{k\lambda} & \lambda - \frac{3m}{k\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Denotando

$$\alpha = \frac{m}{k\lambda} = \frac{m\omega_{n_j}^2}{k} \quad (63)$$

obtem-se

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 - 2\alpha & -2\alpha \\ -\alpha & -2\alpha & 1 - 3\alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 1 = 0. \quad (64)$$

As raízes da equação cúbica são dadas por

$$\alpha_1 = \frac{m\omega_{n_1}^2}{k} = 0,19806 \Leftrightarrow \omega_{n_1} = 0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (65)$$

$$\alpha_2 = \frac{m\omega_{n_2}^2}{k} = 1,5553 \Leftrightarrow \omega_{n_2} = 1,2471 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (66)$$

$$\alpha_3 = \frac{m\omega_{n_3}^2}{k} = 3,2490 \Leftrightarrow \omega_{n_3} = 1,8025 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (67)$$

E ditas às frequências naturais, conhecendo-as, calcula-se as formas modais ou autovetores retornando ao sistema (53), que pode ser escrito como

$$(\lambda_i I - D)x^{(i)} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (68)$$

onde

$$x^{(i)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (69)$$

dita a i -ésima forma modal. Assim, substitui cada valor de λ encontrado no sistema e resolvido por escalonamento, por exemplo, como esquematizado a seguir:

- 1º Modo: Substituindo o valor de $\omega_1 (= \lambda_1 = 5,0489 \frac{m}{k})$ na equação (68), obtem-se

$$\left[5,0489 \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\begin{bmatrix} 4,0489 & -1,0 & -1,0 \\ -1,0 & 3,0489 & -2,0 \\ -1,0 & -2,0 & 2,0489 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Sendo assim, a primeira forma modal é

$$x^{(1)} = x^{(1)}_1 \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,8019 \\ 2,2470 \end{bmatrix}. \quad (72)$$

- *2º Modo:* Substituindo o valor de $\omega_2 (= \lambda_2 = 0,6430 \frac{m}{k})$ na equação (68), obtem-se

$$\left[0,6430 \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\begin{bmatrix} -0,3570 & -1,0 & -1,0 \\ -1,0 & -1,3570 & -2,0 \\ -1,0 & -2,0 & -2,3570 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Dessa forma, a segunda forma modal pode ser escrita como

$$x^{(2)} = x^{(2)}_1 \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,4450 \\ -0,8020 \end{bmatrix}. \quad (75)$$

- *3º Modo:* Substituindo o valor de $\omega_3 (= \lambda_3 = 0,3078 \frac{m}{k})$ na equação (68), obtem-se

$$\left[0,3078 \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\begin{bmatrix} -0,6922 & -1,0 & -1,0 \\ -1,0 & -1,6922 & -2,0 \\ -1,0 & -2,0 & -2,6922 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

Logo, a terceira forma modal pode ser expressa como

$$x^{(3)} = x^{(3)}_1 \begin{bmatrix} 1,0 \\ -1,2468 \\ 0,5544 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Visto isso e observando que a forma padrão das equações matriciais dos sistemas amortecidos e não amortecidos recaem nos sistemas que originam problemas de autovalores e autovetores, torna-se importante a aplicação de métodos numéricos para análise das estruturas,

visto o número de equação no sistema e o entendimento do que representam as soluções numéricas obtidas.

Nesse viés, buscou-se analisar como essas interpretações eram feitas nos diferentes níveis de produção na literatura, sendo um relatório, dois TCC, três dissertações e duas teses obtidos por amostragem aleatória, considerando que a Álgebra Linear seria um embasamento mínimo, como se passa a investigar.

4. SIGNIFICAÇÃO NO ESTUDO DAS VIBRAÇÕES

Objetivando identificar se os recursos da Álgebra Linear, que embasam o desenvolvimento de ferramentas computacionais, integrariam um embasamento teórico mínimo necessário ao engenheiro, buscou-se em análises dinâmicas, estudar oito trabalhos acadêmicos obtidos por amostragem aleatória, do tipo relatório de projeto, trabalho de conclusão de curso, dissertação e tese.

Como metodologia usou-se o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) do professor e pesquisador Romulo Campos Lins, cujo aspecto central é a caracterização do conhecimento, definindo esse modelo por meio do seguinte tripé:

/.../ primeiro, é que a pessoa deve acreditar em algo que constitui parte do conhecimento que produz, o que implica estar consciente dessa crença; segundo, a única maneira que podemos estar seguros e conscientes é se a pessoa declara (e aqui utilizo declara de maneira livre) significado em alguma forma de comunicação aceita por um interlocutor; e, terceiro, não é suficiente considerar o que a pessoa acredita e declara, pois diferentes justificações para uma mesma crença-afirmação corresponde a diferentes conhecimentos (SANTOS e LINS, 2016, p.353).

Assim, usando como elementos constitutivos: autor, texto e leitor, o autor é quem produz os trabalhos acadêmicos, o leitor é a presente autora, que busca as ações enunciativas que legitimam o conhecimento transmitido do autor sobre os objetos autovalores e autovetores no texto, sendo este a produção propriamente dita.

O modelo não se restringe apenas as áreas da Matemática, mas ao processo de produção de significados, já que o conhecimento difere de indivíduo para indivíduo e isso proporciona a produção de conhecimentos diferentes (Santos, 2015).

Fato que pode ser visto em Santos (2015), que se limitou a destinar seu estudo a transformações lineares planas contribuindo para que alunos de um curso de Engenharia Civil pudessem associar esse estudo com a sua prática e apropriar-se das ideias de estudo com produção de significado.

Assim, a seguir será apresentado um resumo dos oito trabalhos com uma numeração aleatória e em seguida, será feito a análise entendida como busca de ações enunciativa que destaquem afirmação mais justificação, pois “é uma crença afirmação junto com uma justificação que me autoriza a produzir aquela enunciação” (Lins, 1999, p 88 apud Santos e Lins, 2016, p.353). Tendo como diretriz o entendimento dos conceitos de autovalores e

autovetores equivalendo à compreensão de que “a configuração do sistema não muda de forma durante o movimento, mas sua amplitude muda” (Rao, 2008, p.221).

4.1 Produções estudadas

Direcionando-se a verificar a real necessidade da disciplina de Álgebra Linear como base teórica mínima necessária ao engenheiro em suas produções, a coleta dos textos se deu por meio de pesquisa eletrônica, via amostragem aleatória de oito trabalhos acadêmicos mistos, isto é, artigos, relatórios de projeto, trabalho de conclusão de curso, tese e dissertação, para que assim pudesse verificar enunciações diferentes para cada tipo de trabalho, visto que o conhecimento difere de indivíduo para indivíduo.

Como no Modelo dos Campos Semânticos (MCS) busca-se uma direção em que o autor produz significados, inicia-se apresentando um resumo de cada trabalho. No primeiro trabalho os autores tiveram como objetivo o cálculo das frequências e modos de vibração de uma ponte. Para isso, utilizaram métodos numéricos como o de Newton-Raphson e Jacobi. Foi implementado o modelo da ponte e foram inseridos os dados de entrada como: peso da estrutura, módulo de Young e seção transversal. Após a leitura dos dados de entrada e da simplificação do modelo, foram calculados os autovalores e autovetores da matriz Jacobiana e a partir disso foi plotado os gráficos que mostravam o comportamento da estrutura para os 5 menores modos de frequência de oscilação natural. Além disso, foram introduzidos os possíveis erros nos cálculos, que podem estar associados a simplificação do método, arredondamentos e entre outros.

Já no segundo trabalho, o autor desenvolveu um estudo diversificado sobre estruturas pré-moldadas de concreto. Os estudos consistiram em pesquisar a aplicabilidade da análise modal experimental na determinação de propriedades físicas, tais como, rigidez, amortecimento e entre outros, investigar condições de contorno e avaliar a utilização de modelos na simulação de estruturas de concreto.

No terceiro trabalho, o autor teve como principal objetivo determinar a forma mais precisa do cálculo dos fatores de amplificação dinâmica em termos de deslocamentos em pontes de pequenos vãos no Brasil. Para isso, desenvolveu e implementou um modelo analítico numérico para representar a interação veículo-pavimento-estrutura. Como validação da ferramenta fez uma comparação com os dados referentes a uma ponte já existente.

No quarto trabalho, a autora teve como objetivo o estudo da influência do sistema vibracional de uma caixa d'água. Para a análise, os dados referentes a geometria e massa da

estrutura foram inseridos como entradas e o software ANSYS Student, que estimou as vibrações e os seus correspondentes modos.

No quinto trabalho, o autor buscou contribuir para a compreensão dos efeitos dinâmicos induzidos por tráfego em pontes ferroviárias. Para isso, apresentou as formas mais usuais de modelação dinâmica e de caracterização experimental do sistema acoplado (ponte, via e comboio), com especial incidência nas metodologias numéricas.

No sexto trabalho, a autora teve como principal objetivo a análise dinâmica de um estádio de futebol através da implementação de um modelo numérico tridimensional de elementos finitos no software SAP2000. O trabalho foi dividido em duas análises, na primeira obteve-se as frequências naturais da estrutura para a vibração livre e não amortecida. Já a segunda, baseou-se na análise de vibração forçada e amortecida com aplicação de uma carga harmônica visando a simulação dos espectadores durante um espetáculo. Os resultados obtidos foram comparados com as recomendações da norma brasileira.

No sétimo trabalho, o autor apresentou uma comparação entre quatro tipologias de contraventamento treliçado, buscando auxiliar na escolha da mais adequada para o combate a ações horizontais em estruturas metálicas. A análise baseou-se em examinar a eficiência destes em relação aos deslocamentos máximos, quantidade de material utilizado, mudanças no primeiro modo de vibração e no seu período natural. Para isso, utilizou-se a simulação numérica utilizando o método dos elementos finitos através do software SAP2000.

No oitavo trabalho, o objetivo do autor consistiu em desenvolver ferramentas computacionais que fossem capazes de representar o comportamento de pontes ferroviárias considerando os efeitos dinâmicos provocados pelo tráfego de trens de carga sobre elas. Além do desenvolvimento, o objetivo também consistiu na análise da interação veículo-estrutura.

Aqui, percebe-se que há a necessidade de entendimento e críticas das soluções obtidas no uso de ferramentas computacionais nesse estudo. Resta verificar se as interpretações dos dados referentes aos conceitos de autovetor e autovalor são enunciados com justificações que façam com que o leitor (aqui entendido como aquele que tem acesso ao texto) aceite.

4.2 Análise do processo de produção de significados

Nessa linha, iniciando pelo quarto trabalho a autora enuncia “que a deformação máxima acontece na extremidade superior, pois essa é a extremidade livre. Já a extremidade engastada no solo, apresenta deformação nula”, porém, nota-se que não houve justificação do que de fato as soluções numéricas e a simulação obtida representam. Como resultado da simulação obteve-

se que na parte superior da estrutura tem-se os menores valores das frequências naturais e consequentemente máximas deformações. Sendo assim, a justificativa segundo a análise se dá através desse fato e não por ser a extremidade livre.

Observando os seguintes trechos: “Como os principais modos de vibração são verticais será analisado o nó com maior deslocamento vertical” e “é possível observar que o ponto de maior deslocamento vertical, é o nó 845 e está situado na parte superior da arquibancada” no sexto trabalho a autora interpretou os dados e obteve o significado do que representa as soluções numéricas, pois, o nó 845 encontra-se no local onde a estrutura possui menores rigidezes, como consequência, menores frequências naturais e maiores deslocamentos.

O autor do primeiro trabalho não deixou explícito a justificativa do significado das soluções numéricas no texto, entretanto, por meio de apresentação gráfica dos valores das frequências para os primeiros cinco modos de vibração, observou-se que houve a interpretação, indicando que ao sistema oscilar, apenas a amplitude do movimento muda e a sua forma continua a mesma.

Analogamente, o autor do terceiro trabalho obteve os dados experimentais e apresentou, porém, não os justificou. Nas análises, pode-se observar que de fato ao oscilar a ponte não muda de configuração geométrica, mas as amplitudes de oscilação alteram-se. Sendo assim, o autor poderia ter facilitado a aceitação dos leitores se tivesse feito a justificação dos resultados retornados através das soluções numéricas.

Agora, ao realizar ensaios dinâmicos com diferentes modelos de pórticos, o autor do segundo trabalho apresentou os resultados e obteve o comportamento dos pórticos para cada modo de vibração. Após isso, fez análise e obteve a justificação para cada mudança no comportamento, como exemplo, tem-se os seguintes trechos: “As frequências do P1-Int resultam superiores às do P2-D.Loc. Isto por causa do módulo de elasticidade do concreto da primeira estrutura (cerca de 16% maior)” e “Os modos do pórtico 4-B e 4-C são fortemente influenciados pela existência da mola axial, que além de flexibilizarem o modelo como um todo, introduzem movimentos parcialmente desvinculados entre a viga e os pilares.”

Também, ao obter e interpretar os valores das frequências nos ensaios sob ação de tráfego e vibração ambiental da ponte, o autor do quinto trabalho fez uma comparação entre os valores obtidos nos dois ensaios e justificou a resposta por meio do seguinte trecho:

“os valores das frequências identificados no ensaio sob ação de tráfego são inferiores aos identificados no ensaio de vibração ambiental da ponte, devido a interação dinâmica ponte-veículo que faz com que a massa não suspensa, e parte da massa suspensa dos veículos sejam acopladas à massa da ponte, levando a uma diminuição das frequências de vibração”.

Como já mencionado, o autor do sétimo trabalho apresentou uma comparação entre quatro tipologias de contraventamento treliçado. Ao analisar uma estrutura de 50 pavimentos o acréscimo de elementos de contraventamento fez surgir um efeito contrário ao esperado, ao invés de diminuir os deslocamentos, aumentou. Porém, isso se explica pelo fato de haver mudança na frequência natural, sendo assim, o autor faz com que o leitor aceite quando explica que: “Com a adição dos contraventamentos, a estrutura tornou-se ainda mais rígida e em consequência aumentou a frequência natural”.

Por fim, no oitavo trabalho o autor obteve resultados das implementações no software e consequentemente plotagem dos valores, porém, nota-se a não interpretação e a falta de justificção em relação as análises dinâmicas. No entanto, o autor através do seguinte trecho justifica a influência de parâmetros nas respostas das estruturas “os mais importantes foram a rigidez, o amortecimento do sistema de suspensão do veículo e a velocidade que este transita sobre a ponte, além da sua massa”.

Assim, pode-se verificar que há interpretações dos dados referentes aos conceitos de autovetor e autovalor, pois, dos oito trabalhos analisados, apenas em dois não são enunciados com justificações que fazem o leitor (aqui entendido como aquele que tem acesso ao texto) aceitar.

.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já visto, o Modelo dos Campos Semânticos busca uma direção em que o autor produza significados. Nesse sentido, a aplicação do modelo e da análise do processo de produção de significados dos objetos autovalor e autovetor revelaram que de fato há um entendimento e crítica do que as soluções numéricas representam, pois, dos oito trabalhos analisados, apenas dois não fazem a interpretação e justificação completa referente aos significados dos objetos.

Aqui, se entende que a ausência de justificação desautoriza a produção de significado, ou seja,

ao conhecer, constituímos ações enunciativas em uma direção que acreditamos que o outro nos legitimaria, produzindo significados por acreditarmos que pertencemos a algum espaço comunicativo. A justificação é a legitimidade de nossa enunciação e o que nos autoriza a produzir significados (SANTOS e LINS, 2016, p.354).

E não se pode considerar tal ausência relativa, pois os capítulos um e dois mostram que “o conhecer” no estudo das vibrações perpassa o entendimento e crítica de como os dados obtidos via ferramentas computacionais estão relacionados com a assimilação dos conceitos de autovetor e autovalor.

Com isso, quando quatro autores fizeram a interpretação e justificação dos dados no corpo do texto e dois autores utilizaram a plotagem de gráficos, aqui compreendido como gestos, foi entendido que no espaço comunicativo das vibrações houve legitimidade, visto serem modos possíveis de produzir significado, já que em Santos e Lins (2016), segundo Lins e Gimenez (1997),

(...) não é tudo que pode ser dito, já que qualquer dada cultura aceita alguns, mas nunca todos os modos possíveis de produzir significados. [Segundo] o próprio processo de produzir significados estabelece limites “internos” (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 143 apud SANTOS e LINS, 2016, p.354).

Limites estes, aqui considerados como a interpretação dos modos de vibração e sua relação com as frequências naturais, que não foram explicitados nos outros dois autores, levando a crer que não obtiveram significados para os objetos.

Em consequência da falta de interpretação e justificação dos significados o leitor não aceita as informações inseridas no texto, por falta de um embasamento teórico que o faça ter confiança no que é lhes passado e assim, aceite, ou seja, busca-se como Brasil e Silva (2015), “o embasamento teórico mínimo para assistir o engenheiro no entendimento e na crítica dos modelos matemáticos e soluções numéricas...” obtidas de uma ferramenta computacional.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Reyloand M. L. R. F. e SILVA, Marcelo Araujo. **Introdução à dinâmica das estruturas para engenharia civil**. 2ª Ed. São Paulo: Blucher, 2015.

DOETING, Claus Ivo e LOPES, Artur Oscar. **Equações diferenciais ordinárias**. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPAR, 2014.

KOLMAN, Bernard e HILL, David R. **Álgebra Linear com aplicações**. 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

RAO, Singeru S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

SANTOS, João Ricardo Viola dos e LINS, Romulo Campos. **Movimentos de Teorizações em Educação Matemática**. Bolema, Rio Claro (SP), V. 30, N. 55, p. 325 – 367, ago, 2016.

SANTOS, Leandro Teles Antunes e Miranda, Dimas Felipe de. **A Matemática das transformações lineares planas e representações em um curso de engenharia civil**. In: VII Encontro Mineiro de Educação Matemática. Minas Gerais, 2015.

SILVA, Samuel da. **Vibrações Mecânicas**. Notas de Aula – UNEIOESTE, Foz do Iguaçu-PR, 2009. Disponível em <<http://joinville.ifsc.edu.br>>. Acessado em 28.03.17 às 16h51min.

SORIANO, Humberto Lima. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

VALIENTE, Elton da Silva Piava. **Aplicação de sistemas lineares e determinantes na Engenharia Civil**. 91p. Dissertação – UFMS. Campo Grande-MS, 2015. Disponível em <<http://repositorio.cbc.ufms.br>>. Acessado em 07 de junho de 2016 às 20h09min.

VENCESLAU, Sheyla Maurício Maia. **Modelagem matemática de sistemas vibratórios com aplicação de autovalores**. 2015. 94 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2015.