



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

FRANCISCO GUILHERME REGO BRASIL

**DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA PARA ANÁLISE DOS
OPERADORES VETORIAIS EM COORDENADAS GENERALIZADAS**

Pau dos Ferros-RN

2020

FRANCISCO GUILHERME REGO BRASIL

**DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA PARA ANÁLISE DOS
OPERADORES VETORIAIS EM COORDENADAS GENERALIZADAS**

Orientador: Prof. Dr. Lino Martins de Holanda Júnior

Monografia orientada pelo Prof. Dr. Lino Martins de Holanda Júnior e apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-árido, como parte dos requisitos necessários para a conclusão do curso de Ciência e Tecnologia, Modalidade: Bacharelado.

Pau dos Ferros-RN

2020

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Bd Brasil, Francisco Guilherme Rego.
Desenvolvimento da álgebra para análise dos
operadores vetoriais em coordenadas generalizadas
/ Francisco Guilherme Rego Brasil. - 2020.
59 f. : il.

Orientador: Lino Martins de Holanda Júnior.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2020.

1. Índices. 2. Métrica. 3. Operadores. 4.
Vetor. I. Júnior, Lino Martins de Holanda,
orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

FRANCISCO GUILHERME REGO BRASIL

**DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA PARA ANÁLISE DOS
OPERADORES VETORIAIS EM COORDENADAS GENERALIZADAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a
Universidade Federal Rural do Semiárido
(UFERSA) – Campus Pau dos Ferros, como
parte das exigências para a obtenção do título
de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e
Tecnologia.

Defendida em, 12 de Dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Lino Martins de Holanda Júnior
Presidente da banca - UFERSA

Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor
1º Examinador - UFERSA

Prof. Dr. Hidalyn Theodory Clemente Mattos de Souza
2º Examinador - UFERSA

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me iluminado e ter colocado pessoas de tão bom coração em meu caminho na universidade. Aqui agradeço a cada um que faz o nome da UFERSA ser a instituição que é, e ter o seu devido reconhecimento. Sempre fui muito bem atendido pelos professores, coordenadores e servidores da instituição, agradeço a cada um que zela pelo nome dessa instituição.

Agradeço a todos que confiaram e acreditarão em mim, mesmos nos momentos difíceis que passei durante toda a graduação, listo aqui duas pessoas que considero de grande importância nessa árdua caminhada: Maria de Fátima Rêgo Soares Brasil (minha mãe) e Francisco Brasil Morais (meu pai), pessoas essas que sempre me inspiram a ser uma pessoa cada vez melhor, a pesar das dificuldades sempre buscaram me educar mesmo com o pouco ensino que tiveram, obrigado por apoiarem e continuarem apoiando meus estudos.

Aos meus irmãos Isaéllen Aryanne Rêgo Brasil e João Paulo Rêgo Brasil Morais, os agradeço por existirem e por se preocuparem comigo, os dedico esse trabalho como fruto de inspiração, acredito em vocês como futuros promissores, sabemos que em nossa família não há pessoas com alguma graduação em nível superior que esteja em um grau de parentesco próximo e espero que um dia essa realidade possa mudar.

Aos amigos que fiz nessa caminhada e que sempre me ajudaram nos momentos de lutas e de glórias: Jefferson Murillo, Robert Wagner, João Matias, Vitor Mateus, José Luan, Bruno Fernandes, Bruna Fernandes, Pedro Paulo, Cristina Carvalho, Taynara Morais, Carlos Daniel, Adriano Bezerra, George Daniel, Sávio Brasil, Alany Silany, Hirlan Kauan, Jailson Júnior e Emanuel Fernando. Muito obrigado por estarem comigo.

Agradeço a todos os amigos e familiares que me apoiaram de maneira direta e também indireta, e por fim mas não menos importante agradeço de todo meu coração ao meu orientador, uma pessoa que tenho bastante admiração e reconhecimento pelo seu trabalho, agradeço por tudo que fez por mim nessa instituição. Muitíssimo obrigado ao meu mestre Lino Martins de Holanda Júnior.

Resumo

A maioria das equações que regem o universo são escritas de maneira a atenderem o espaço tridimensional cartesiano, por se tratar de uma normatização vetorial para o cálculo diferencial, sabemos que os fenômenos físicos se apresentam de maneira natural em diversos tipos de simetria, no qual cada um necessita ser analisado em um sistema de coordenadas específico para seguir tal simetria. Dessa forma, as equações precisam ser adaptadas para cada caso. Em alguns deles, isso pode ser bastante complicado e com cálculos extensos. Nossa proposta é apresentar uma ferramenta poderosa para a análise da estrutura das equações, de forma a facilitar e reduzir essas contas extensas e adotar a um único modelo, ou seja, escrevê-las em uma notação mais elegante e compacta, chamada de notação indicial de Einstein, onde as equações são escritas através de suas grandezas, com índices representando somas e envolvendo as características gerais dos sistemas de coordenadas, como a métrica e os vetores unitários direcionais. Assim, poderemos escrevê-las de forma a representarem qualquer simetria, desde que se tenha a métrica do sistema utilizado.

Palavras-chave: Cálculo, Índices, Métrica, Operadores, Vetor.

Abstract

Most of the equations that govern the universe are written in a way that meets the three-dimensional Cartesian space, since it is a vector standardization for differential calculus, we know that physical resources are naturally present in different types of symmetry, in which each one necessary to be analyzed in a specification system to follow such symmetry. Thus, the equations need to be adapted for each specific case and, in some of them, this can be quite complicated and with extensive calculations. Our proposal is to present a powerful tool for the analysis of the structure of the equations, in order to facilitate and reduce these extensive accounts and adopt a single model, that is, to write them in a more elegant and compact notation, called the index notation of Einstein, where the equations are written through their magnitudes, with indices representing sums and involving the general characteristics of the coordinate systems, such as the metric and the directional unit vectors. Thus, we will be able to write them in a way that represents any symmetry, as long as we have the metric of the system used.

Keywords: Calculus, Index, Metric, Operators, Vector.

Sumário

1	Introdução	4
1.1	Objetivos	5
1.1.1	Objetivo Geral	5
1.1.2	Objetivos Específicos	6
1.2	Metodologia	6
2	Referencial Teórico	7
2.1	Notação Indicial	7
2.1.1	Delta de Kronecker	9
2.1.2	Produto escalar	10
2.1.3	Símbolo de Levi-Civita	10
2.1.4	Produto Vetorial	12
2.1.5	Relação entre o Delta de Kronecker e o Símbolo de Levi-Civita .	13
2.1.6	Derivada de vetores	14
2.2	Operadores vetoriais	16
2.2.1	Gradiente	16
2.2.2	Divergente	19
2.2.3	Rotacional	22
2.2.4	Laplaciano	23
2.3	Coordenadas	24
2.3.1	Coordenadas Ortogonais	24
2.3.2	Coordenadas Cilíndricas	27

2.3.3	Coordenadas Esféricas	29
3	Resultados	32
3.1	Definindo as equações	32
3.1.1	Base covariante	33
3.1.2	Métrica	33
3.1.3	Operadores Vetoriais Generalizados	35
3.2	Coordenadas ortogonais cartesianas na notação indicial	36
3.2.1	Gradiente ortogonal cartesiano na notação indicial	38
3.2.2	Divergente ortogonal cartesiano na notação indicial	38
3.2.3	Rotacional ortogonal cartesiano na notação indicial	39
3.2.4	Laplaciano ortogonal cartesiano na notação indicial	39
3.3	Coordenadas cilíndricas na notação indicial	40
3.3.1	Gradiente em coordenadas cilíndricas	42
3.3.2	Divergente em coordenadas cilíndricas	43
3.3.3	Rotacional em coordenadas cilíndricas	43
3.3.4	Laplaciano em coordenadas cilíndricas	44
3.4	Coordenadas esféricas na notação indicial	45
3.4.1	Gradiente em coordenadas esféricas	48
3.4.2	Divergente em coordenadas esféricas	48
3.4.3	Rotacional em coordenadas esféricas	49
3.4.4	Laplaciano em coordenadas esféricas	49
4	Conclusão	51

Lista de Figuras

2.1	Sentido das permutações	11
2.2	Gradiente e suas curvas de níveis	17
2.3	Representação do vetor gradiente	17
2.4	Divergente nulo	20
2.5	Divergente positivo	20
2.6	Rotacional em um campo vetorial	23
2.7	Sistema cartesiano bidimensional	25
2.8	Quadrantes do sistema cartesiano bidimensional	26
2.9	Sistema cartesiano ortogonal tridimensional	26
2.10	Sistema ortogonal cilíndrico	27
2.11	Sistema ortogonal esférico	30

Capítulo 1

Introdução

Em um contexto atual, é perceptível o mundo evoluir de uma maneira rápida, porém, onde ainda existem muitas perguntas e poucas respostas. A rapidez com que precisamos de informação e a necessidade de sempre avançar em busca de resultados não pode parar; o homem hoje vive uma realidade jamais imaginada por ele mesmo a 100 anos atrás. Para acompanhar tanta evolução e tecnologia, estudos requerem tempo, trabalho e pesquisa para enfrentar esses enormes desafios. Todo esse avanço e tecnologia presentes nos dias atuais só nos mostram o quanto a matemática e a física devem caminhar lado a lado e estarem sempre com largos passos á frente do seu tempo. Pensando nisso, se faz necessário estudar ferramentas que busquem sempre otimizar tempo, reduzam contas desnecessárias e que possuam uma matemática elegante.

Visando uma nova reescrita e uma melhor aplicação dos conhecimentos que cercam a física e o cálculo diferencial e integral, o seguinte trabalho tem como objetivo um estudo sobre a generalização de alguns sistemas de coordenadas de maneira mais formalística e elegante; a proposta é apresentar uma notação que possa ser desenvolvida para cálculos matemáticos economizando contas aparentemente desnecessárias.

A maioria das equações que utilizadas nos modelos matemáticos para descrever os fenômenos são convenientemente escritas em coordenadas cartesianas. O trabalho visa estudar um arranjo para equações de uma forma mais generalizada e que não se limitem a um único sistema de coordenadas. Com o estudo da notação indicial de Albert

Einstein, e utilizando alguns operadores vetoriais, cujos conceitos serão explorados ao longo do trabalho, teremos ao final do projeto uma nova configuração generalista e arranjo de equações, tendo em mãos uma ferramenta bastante poderosa para o estudo da física.

Com o modelo pronto, iremos exemplificar como isso ocorre transformando um arranjo que está em coordenada convencional para uma nova maneira que possibilite calcular a mesma situação, porém a equação estará rearranjada de forma generalizada, o que nos permite utilizá-la em qualquer sistema de coordenadas que seja adequado ao problema e para qualquer dimensionalidade.

As leis da físicas só podem ser expressas de maneira concisa e precisa por meio da matemática. Se quisermos avançar no mundo, os físicos precisam dominar conceitos matemáticos básicos e avançados, para só assim utilizá-los com maestria nos cálculos mais complexos que vemos na física [1].

1.1 Objetivos

Propor um arranjo de equações utilizando a notação de Einstein (tornando-as mais compactas e elegantes) em sistemas de coordenadas generalizadas que possibilite sua solução em qualquer tipo de simetria.

1.1.1 Objetivo Geral

O seguinte trabalho visa como objetivo a análise e o estudo de uma ferramenta que nos dê uma padronização de um modelo matemático para a generalização das coordenadas comumente utilizadas (cilíndricas e esféricas), tendo como uso principal a notação indicial de Albert Einstein. Iniciaremos o estudo da generalização e ao final será apresentado um novo arranjo para representá-las.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Estudar a notação das equações em coordenadas ortogonais.
- Desenvolver um estudo sobre a notação de Einstein.
- Entender o funcionamento dos operadores vetoriais.
- Escrever os operadores vetoriais em coordenadas generalizadas.

1.2 Metodologia

Para a realização do respectivo trabalho, será utilizado uma revisão bibliográfica e um estudo sobre a notação indicial de modo que se compreenda os principais conceitos e definições a serem utilizados. Com o estudo dessas ferramentas, é possível fazer a interligação dos assuntos chegando no objetivo almejado.

Antes da notação propriamente dita é necessário realizar uma revisão de algumas propriedades do cálculo vetorial e diferencial, como o estudo de versores, derivadas direcionais, o rotacional, o divergente e o laplaciano, assim como algumas coordenadas usuais bem como as suas conversões, Exemplo: coordenada cartesiana para cilíndrica, coordenada cartesiana para esférica, o próprio estudo das coordenadas ortogonais, dentre outras ferramentas do cálculo. A notação indicial não só dará um tratamento algébrico mais elegante e físico para as equações, esse novo modelo também simplifica alguns termos repetidos e compacta as equações, eliminando contas aparentemente desnecessárias.

Será utilizado o editor de texto latex, para a digitação do referente trabalho, visto que o programa microsoft word não apresenta recursos interessantes para trabalhar com um número tão extenso de equações, contas e manipulações algébricas.

Capítulo 2

Referencial Teórico

Em nosso referencial teórico abordaremos as principais ferramentas de pesquisa que serão a base para construir as nossas considerações e cálculos que virão posteriormente, por isso é importante ressaltar a importância de algumas notações, fórmulas e operadores vetoriais que conhecemos do cálculo diferencial, assim como a notação indicial, suas propriedades e simbologia utilizada. Os tópicos a seguir irão nortear o que será utilizado para seguir com essa pesquisa e chegar no objetivo almejado.

2.1 Notação Indicial

A notação indicial é uma ferramenta de cálculo matemática desenvolvida por um físico bastante renomado, o ilustre Albert Einstein, foi quem desenvolveu a notação com o intuito de manipular sistemas de equações lineares e somatórios, com isso ele desenvolveu uma ferramenta que o auxiliava reduzindo contas aparentemente desnecessárias. Tudo isso por meio da análise de índices e termos semelhantes, a notação tinha o intuito de compactar grandes equações e trabalhar com grandezas que fugiam da realidade de dimensão 3, sendo esta uma ferramenta para trabalhar com equações e grandezas de ordens mais altas [2].

Para iniciarmos essa análise, iremos começar com o básico, que é o estudo de vetores. Um vetor é uma entidade que possui módulo, direção e sentido e temos que a base

canônica representa os versores unitários nas direções $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Esses vetores escritos em coordenadas ortogonais são os chamados vetores base (descritos como $\hat{e}_i$) de tal maneira que podemos compactar um vetor em uma notação de somatório segue [1].

Considerando um vetor arbitrário na base canônica na forma

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z} \quad (2.1)$$

Podemos transformá-lo da notação convencional substituindo suas direções pelos versores base, de tal modo que para esse caso teremos:

$$\vec{F} = F_1 \hat{e}_1 + F_2 \hat{e}_2 + F_3 \hat{e}_3. \quad (2.2)$$

Podemos observar que esse vetor encontra-se de maneira expandida e podemos compactá-lo agora em uma notação de somatório,

$$\vec{F} = \sum_{n=1}^3 F_n \hat{e}_n. \quad (2.3)$$

A convenção da notação indicial ainda vai mais além, pois a notação desconsidera o somatório com isso temos de forma simplificada o vetor base da seguinte maneira:

$$\vec{F} = F_i \hat{e}_i. \quad (2.4)$$

Nesta notação, índices repetidos representam uma soma. Com a utilização de mais duas ferramentas que veremos mais adiante, podemos fazer ainda mais manipulações e mais simplificações com somatórios e termos repetidos.

Vejamos o seguinte exemplo: Partindo de uma soma qualquer entre dois termos sendo esses $\vec{A}$ e $\vec{B}$, temos que o equivalente entre esses termos se dará da seguinte forma,

$$\vec{A} + \vec{B} \equiv A_i \hat{e}_i + B_i \hat{e}_i. \quad (2.5)$$

Note que esse equivalente pode ser agrupado da seguinte maneira,

$$A_i \hat{e}_i + B_i \hat{e}_i \equiv (A_i + B_i) \hat{e}_i. \quad (2.6)$$

Podemos observar que para a soma acontecer, os índices de $\vec{A}$ e de $\vec{B}$ devem ser iguais, pois não faria sentido algum somar $A_x + B_y$, ambos estariam com índices diferentes e isso não faria o menor sentido [1].

2.1.1 Delta de Kronecker

A primeira ferramenta de manipulação para o uso da notação indicial é o delta de Kronecker, representado pela seguinte letra grega: “ δ ”. O delta de Kronecker é definido da seguinte maneira,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \text{ (Ex : } \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \dots = 1 \\ 0, & \text{se } i \neq j \text{ (Ex : } \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{32} = \dots = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Esse símbolo é muito importante quando associado a alguma componente vetorial, pois conforme visto na definição, alguns termos irão zerar.

Partindo para um exemplo de um caso tridimensional do delta de Kronecker é

$$A_j \delta_{2j} = A_1 \delta_{21} + A_2 \delta_{22} + A_3 \delta_{23}. \quad (2.8)$$

Se observarmos bem pela definição que foi apresentada acima na equação 2.7, note que onde tivermos índices diferentes, estes irão zerar o delta, em contrapartida, onde houver índices iguais como é o caso da equação 2.8, $A_2 \delta_{22}$, note que o valor dos índices iguais nos trará como resultado o valor 1 que irá multiplicar o seu termo correspondente, e portanto agora teremos:

$$A_1 \delta_{21} + A_2 \delta_{22} + A_3 \delta_{23} = 0 + A_2 \delta_{22} + 0 = A_2. \quad (2.9)$$

Fica notório que os índices repetidos são mudos, e uma de suas propriedades é que os mesmos podem ser trocados por $(i = 1, 2, 3)$ [1].

Vejamos um exemplo: Mostre que $\delta_{ii} = 3$.

Como “i” é um índice repetido, se aplicarmos ele a um somatório temos o seguinte,

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} \quad (2.10)$$

Abrindo esse somatório, temos:

$$\sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3. \quad (2.11)$$

Nesse exemplo é notório o uso das propriedades já mencionadas sobre o delta de Kronecker onde índices iguais equivalem a 1. Como temos 3 deltas com índices iguais, o resultado dessa conta resulta em 3. Esse exemplo deixa claro como a simplificação e análise de índices elimina os somatórios e contas aparentemente desnecessárias.

2.1.2 Produto escalar

Como consequência da definição de delta de Kronecker, o produto escalar entre dois versores (vetores unitários e ortogonais) pode ser definido simplesmente como o produto escalar entre dois vetores ortogonais, sendo estes associados ao delta de Kronecker que é definida da seguinte maneira:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}. \quad (2.12)$$

Vejamos o exemplo

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \hat{e}_i) \cdot (B_j \hat{e}_j) = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_j \delta_{ji} = A_i B_i. \quad (2.13)$$

Neste exemplo, podemos notar que o delta de Kronecker é simétrico em relação aos seus índices ou seja $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

2.1.3 Símbolo de Levi-Civita

Outra ferramenta de extrema importância para o entendimento da notação indicial é o símbolo de Levi-Civita. Trata-se de outro símbolo que terá muita utilização na manipulação de produtos vetoriais, sua definição e símbolos são descritos como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } i, j, k \text{ estão em ordem cíclica positiva} \\ -1, & \text{se } i, j, k \text{ estão em ordem cíclica negativa} \\ 0, & \text{se dois ou mais índices são repetidos} \end{cases} \quad (2.14)$$

A ordem cíclica apresentada corresponde a sequência natural que os números 1, 2 e 3 apresentam, de tal modo que podemos exemplificar o que foi citado acima da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1, \text{ Sequência positiva} \\ \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1, \text{ Sequência negativa} \\ \epsilon_{223} = \epsilon_{313} = \epsilon_{311} = 0, \text{ Índices repetidos} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Podemos notar que a cada inversão que ocorre em índices consecutivos, irá existir uma mudança de sinal, e que se houver índices repetidos o valor do epsilon será nulo. Por exemplo, observa a mudança de sinal a cada permutação a seguir:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{kji} = \dots \quad (2.16)$$

No exemplo acima, também é possível fazer essa mesma análise utilizando o sentido horário e o sentido anti-horário tanto para os números 1,2,3, quanto para a base canônica i,j,k. A figura 2.1, nos mostra como as permutações ocorrem e quais os sentidos devemos

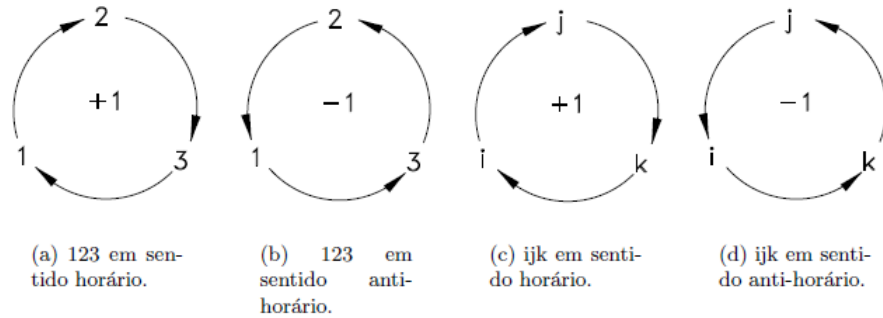


Figura 2.1: As figuras a e b representam as permutações com os índices numéricos. Em ordem positiva o sentido é horário e em ordem negativa o sentido é anti-horário. As figuras c e d representam as permutações com índices da base canônica. Em ordem positiva o sentido é horário e em ordem negativa o sentido é anti-horário.

analisar, como por exemplo temos que o sentido negativo é o sentido anti-horário, enquanto que o sentido positivo é o horário.

Se analisarmos um sistema cartesiano convencional dado pelas componentes “X”, “Y” e “Z”, a ordem cíclica positiva, irá corresponder a XYZ, de tal modo que teria ZYX e XZY como sendo negativos e YZX e ZXY, como positivos, Pois XYZ seria 123, e ZYX seria 321, ou seja não importa a letra ou a coordenada que estejamos utilizando, a cada inversão se a ordem ficar crescente teremos uma ordem cíclica positiva, se a ordem for decrescente a ordem será negativa [1].

Considere o exemplo: Avalie a expressão $\epsilon_{ijk}A_iB_jC_k$ para o caso tridimensional,

$$\epsilon_{ijk}A_iB_jC_k \equiv \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk}A_iB_jC_k. \quad (2.17)$$

Expandindo os termos da equação encontra-se,

$$\epsilon_{123}A_1B_2C_3 + \epsilon_{231}A_2B_3C_1 + \epsilon_{312}A_3B_1C_2 + \epsilon_{321}A_3B_2C_1 + \epsilon_{213}A_2B_1C_3 + \epsilon_{132}A_1B_3C_2.$$

Se analisarmos com a definição que nos foi dada do símbolo de Levi-civita vamos encontrar que os termos com as sequências 321, 213 e 132, são negativos e portanto ficamos agora com o seguinte:

$$A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 - A_2B_1C_3 - A_1B_3C_2.$$

Organizando os termos da equação agora temos o seguinte:

$$\epsilon_{ijk}A_iB_jC_k = A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1). \quad (2.18)$$

A equação acima se trata de um determinante que denominaremos de M:

$$M = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Desse modo temos que $\epsilon_{ijk}A_iB_jC_k \equiv \text{Det } M$.

2.1.4 Produto Vetorial

Um produto vetorial é de maneira bem simples o produto entre dois vetores que irão resultar em um novo vetor resultante, por exemplo: o produto vetorial de um vetor $\vec{A}$

com um vetor $\vec{B}$, nos resultará em um vetor $\vec{C}$. Se comparado a um produto escalar teremos uma diferença pois o produto escalar nos resultará em um número, enquanto que o produto vetorial, como o próprio nome indica, irá resultar um vetor [3].

Porém como estamos em um estudo sobre a notação indicial iremos definir um produto vetorial em termos do delta de Kronecker conforme vemos abaixo na definição:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k. \quad (2.19)$$

Vejamos o seguinte exemplo: Mostre a identidade $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$

No primeiro passo, podemos denominar $\vec{D} \equiv \vec{B} \times \vec{C}$, assim

$$\vec{D} = \epsilon_{ijk} B_j C_k \hat{e}_i$$

E as componentes são escritas como

$$D_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k.$$

Então,

$$\vec{A} \cdot \vec{D} = A_i D_i = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k. \quad (2.20)$$

Como queremos chegar em $\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$, temos que:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \equiv \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = -\epsilon_{jik} A_i B_j C_k = \epsilon_{jki} B_j C_k A_i$$

Como os índices repetidos são mudos, podemos trocar os índices do epsilon, dessa maneira os “j” são trocados pelos “i”, os “k” são trocados pelos “j” e os “i” são trocados pelos “k”. Assim ficamos com a seguinte expressão,

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \equiv \epsilon_{ijk} B_i C_j A_k = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}). \quad (2.21)$$

2.1.5 Relação entre o Delta de Kronecker e o Símbolo de Levi-Civita

A relação entre os símbolos de Kronecker e Levi-Civita, comumente utilizada nas expressões envolvendo notação de Einstein, é particularmente importante, pois tal relação

nos ajudará ainda mais em nossa análise e considerações durante os cálculos. Assim, podemos relacionar o delta de Kronecker e o símbolo de Levi-civita da seguinte maneira [1]:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ipm} = \delta_{jp}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kp} \quad (2.22)$$

Na relação acima, podemos observar que o índice “ i ”, é um índice mudo pois o mesmo é repetido nos dois epsilons. Logo em sequência, existem combinações entre os outros índices restantes j, p, k, m . É notório que os índices “ jk ” e “ pm ”, não voltam a se combinar mais, pois o “ j ” agora passa a se combina com “ p ” e “ m ”, e o “ k ” também se combina com o “ p ” e o “ m ”, e o resultado dessas combinações é o que vemos na equação acima [1].

Vejamos mais dois casos com índices numéricos:

-Exemplo 1

$$\epsilon_{123}\epsilon_{123} = \delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}\delta_{32} = (1 \cdot 1) - (0 \cdot 0) = 1.$$

-Exemplo 2

$$\epsilon_{132}\epsilon_{123} = \delta_{32}\delta_{23} - \delta_{33}\delta_{22} = (0 \cdot 0) - (1 \cdot 1) = -1.$$

Nesses dois exemplos acima podemos perceber como ocorre bem a permutação dos índices. Conforme mostrado na definição que relaciona o delta de Kronecker e o símbolo de Levi-civita, note que para ambos os exemplos o índice 1 se repete e por tanto é um índice mudo enquanto os índices 2 e 3 são permutados entre si. Quando se tem índices iguais juntos, ambos equivalem a 1 e se os índices forem diferentes o resultado correspondente é 0.

2.1.6 Derivada de vetores

Nesta seção muita coisa se assemelha ao que já conhecemos sobre a derivada convencional. Iremos definir primeiramente um vetor $\vec{V}$ com dependência de um parâmetro escalar ω , assim temos:

$$\vec{V} = \vec{V}(\omega) \equiv V_i(\omega)\hat{e}_i. \quad (2.23)$$

Se diferenciarmos esta expressão, teremos

$$\frac{d\vec{V}}{d\omega} \equiv \hat{e}_i \frac{dV_i}{d\omega}. \quad (2.24)$$

De maneira análoga ao que já conhecemos, muita coisa se assemelha às derivadas comuns e às propriedades de derivação pelas funções escalares, como a regra do produto por exemplo.

Vejam os casos a seguir: $\frac{d}{d\omega}(\vec{U} \times \vec{V})$

$$\frac{d}{d\omega}(\vec{U} \times \vec{V}) = \frac{d}{d\omega}(\epsilon_{ijk}U_jV_k)$$

$$\frac{d}{d\omega}(\epsilon_{ijk}U_jV_k) = \epsilon_{ijk}\left(\frac{dU_j}{d\omega}V_k + U_j\frac{dV_k}{d\omega}\right)$$

Por fim temos,

$$\frac{d}{d\omega}(\vec{U} \times \vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{d\omega} \times \vec{V} + \vec{U} \times \frac{d\vec{V}}{d\omega}. \quad (2.25)$$

Note que nessa operação podemos observar a regra do produto entre dois vetores sendo aplicada, tendo como resultado a derivada de $\vec{U}$ vetorial $\vec{V}$, mais $\vec{U}$ e o produto vetorial com a derivada de $\vec{V}$. No geral as regras de derivação com expressões vetoriais irão resultar nas regras que conhecemos no cálculo diferencial [1].

Por exemplo:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \right] = \frac{dA}{d\omega}(B \times C) + A \cdot \frac{d\vec{B}}{d\omega} \times \vec{C} + A \cdot \vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{d\omega}. \quad (2.26)$$

Como é observado, as operações e análises são as mesmas para produto escalar e produto vetorial.

2.2 Operadores vetoriais

Um operador, de forma mais simplificada, é um símbolo que adotamos para representar alguma operação relevante de forma a simplificar o entendimento conceitual, facilitar a algebrização de equações de interesse. Dessa forma, definiremos um operador muito frequentemente utilizado e de grande importância em cálculos vetoriais, o operador Nabla “ ∇ ”, esse operador também é conhecido em alguns livros de cálculo como “Del”.

Na realidade o operador nabla representa um vetor simbólico, o qual permite seu uso em operações vetoriais convencionais. A sua aplicação em campos escalares e vetoriais, produz ferramentas matemáticas indispensáveis para a quantificação e entendimento conceitual de diversos campos da ciência.

Os operadores vetoriais não possuem significado físicos ou geométricos, os mesmos só terão funcionalidade quando estão aplicados a uma função. Dentre os mais conhecidos temos o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano. O operador comumente utilizado é o “Nabla”, o mesmo se trata de um operador diferencial que pode atuar tanto em funções escalares quanto vetoriais e ainda tensoriais [1].

Nas seções a seguir, veremos uma breve introdução aos operadores vetoriais e como escrevemos suas operações sobre uma função em coordenadas cartesianas. Antes de entendermos as aplicações, devemos estar cientes do que é o Nabla. Esse operador possui o seu símbolo assemelhado a um delta invertido, e suas combinações entre produto escalar, produto vetorial e produto entre ele mesmo, é que resulta nas operações citadas acima, e as quais veremos um pouco nesta seção.

2.2.1 Gradiente

O gradiente de um campo escalar, nada mais é do que um vetor resultante da operação do operador nabla sobre um campo escalar $F(x, y, z)$, que tem importância particular devido ao fato de ser uma função vetorial que estabelece a intensidade, direção e sentido

da maior taxa de crescimento da função F num dado ponto do espaço. Por exemplo esse vetor pode ser utilizado para saber a variação de temperatura em alguma determinada localidade, se houver um ponto localizado no nordeste do país e outro localizado ao sudeste medindo as suas temperaturas, e sabendo as localizações no espaço e suas distâncias, pode-se calcular a taxa média da variação de temperatura entre os pontos e com isso ter um gradiente de temperaturas [4].



Figura 2.2: Curvas de níveis em tonalidade rosa, e em azul está destacada a curva onde se tem o maior crescimento da função, conforme a mesma se aproxima do centro.

O gradiente é uma função que tem uma variedade de aplicações, podemos ainda considerar um mapa topográfico e representar a altura acima do mar analisando a curva de maior crescimento. O vetor gradiente será perpendicular ao plano tangente que tangencia as curvas de níveis [4].

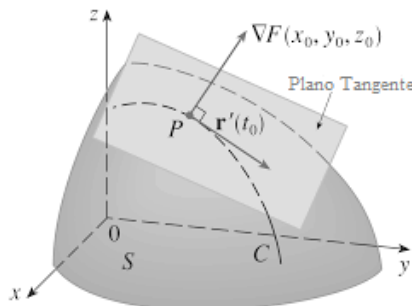


Figura 2.3: Representação de um sistema de coordenadas tridimensional, onde o vetor Gradiente da função F é ortogonal ao plano que tangencia as curvas de níveis do parabolóide desenhado.

O gradiente possui utilidade tanto para física quanto para a matemática, fisicamente

ele tratará os problemas em conformidade com o grau de variação das características de um meio analisado, tais como a temperatura e a pressão atmosférica por exemplo. Na visão matemática esse operador resulta no produto do operador Nabla por uma função escalar no ponto [5].

Com isso o vetor gradiente em coordenadas cartesianas tridimensionais pode ser representado da seguinte maneira:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \quad (2.27)$$

Vale salientar que todas as operações algébricas básicas do cálculo diferencial se aplicam também a esse modelo matemático, desse modo podemos utilizar a regra da soma, regra da diferença, regra do produto e regra do quociente [5].

vejamos algumas das propriedades para o cálculo do gradiente:

1. REGRA DA SOMA

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (2.28)$$

2. REGRA DA DIFERENÇA

$$\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g \quad (2.29)$$

3. REGRA DA MULTIPLICAÇÃO POR CONSTANTE

$$\nabla(kf) = k\nabla f \quad (2.30)$$

4. REGRA DO PRODUTO

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (2.31)$$

5. REGRA DO QUOCIENTE

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \quad (2.32)$$

Vejamos um exemplo: Seja $f(x, y, z) = x \sin(yz)$, determine o seu gradiente.

Para encontrarmos o gradiente desta função devemos deriva-lá parcialmente para cada uma de suas variáveis que nesse caso são x,y e z.

O Gradiente de f será dado por:

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle \quad (2.33)$$

Desse modo diferenciando a função f em x,y e z ficamos com as seguintes expressões:

$$\nabla f(x, y, z) = \langle \text{sen}(yz), xz\cos(y), xy\cos(yz) \rangle \quad (2.34)$$

Note que o resultado do gradiente nos dá um vetor, e com esse vetor é possível calcular a derivada direcional, caso seja informado o ponto na questão.

Nesse caso a derivada direcional será o vetor gradiente e um produto escalar com o vetor unitário de um vetor qualquer dado no problema.

$$D_u f = \nabla f(x, y, z) \cdot \hat{u} \quad (2.35)$$

Onde $D_u f$ é a derivada direcional de f e “ $\hat{u}$ ” é o vetor unitário do vetor dado no problema.

2.2.2 Divergente

O divergente é uma propriedade que atua sobre um campo vetorial, se considerarmos cada ponto que temos em um campo vetorial, os seus correspondentes apresentarão características próprias. Partindo para um exemplo real, é como se tentássemos analisar a distribuição de ventos no nosso planeta, onde em um dado instante irá existir um vetor associado a cada ponto da atmosfera, onde o mesmo vetor analisado possui intensidade e sentido. O divergente de um campo vetorial representa o fluxo do vetor característico por unidade de volume. Para se calcular o divergente de um campo, também iremos utilizar o operador Nabla a esta função, de tal modo que esse operador seja multiplicado escalarmente pela função vetorial. Podemos definir o divergente a partir de um campo vetorial $\vec{F}$ [1].

A palavra divergente não recebe esse nome por escolha arbitrária, o real sentido de sua definição é que $\nabla \cdot \vec{f}$, se trata do quanto um determinado vetor se espalha dentro de seu campo escalar, ou seja o quanto ele irá divergir ao fugir do real sentido de seu campo. Se ele diverge no mesmo sentido de seu fluxo dizemos que é uma divergência positiva, se for no sentido contrário então teremos uma divergência negativa [6].

As figuras e o exemplo a seguir, retratam um campo vetorial onde o divergente é nulo e outra onde se tem uma divergência positiva.

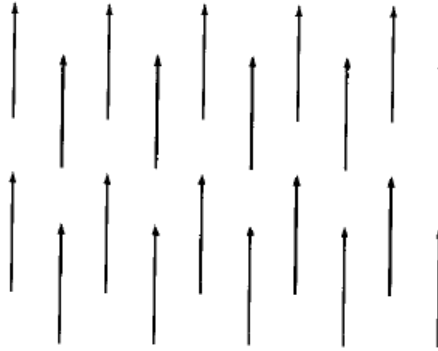


Figura 2.4: Divergente nulo, o fluxo dos vetores em seu campo vetorial não diverge para outros sentidos.

Note que na figura 2.4 as flechas vetoriais não fogem do seu real sentido, permanecem sempre seguindo a mesma direção de seu campo, por outro lado a figura 2.5 a seguir, possui um divergente positivo, pois as flechas vetoriais, saem do seu real sentido.

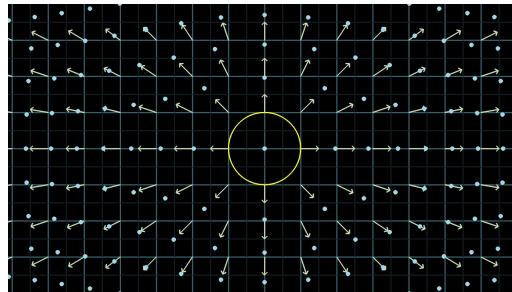


Figura 2.5: Divergente positivo, o fluxo dos vetores mostrado se disperça do real sentido de seu fluxo original, os vetores divergem do campo para outros pontos.

Seja,

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\hat{i} + F_y(x, y, z)\hat{j} + F_z(x, y, z)\hat{k} \quad (2.36)$$

Se $\vec{F}$ é uma função contínua e com suas derivadas contínuas, podemos definir o divergente desse campo por meio de um produto escalar com o operador Nabla, de tal modo que assim teremos:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (2.37)$$

O resultado desse produto escalar é o divergente, note que diferentemente do que havíamos definido no gradiente, o divergente é um produto escalar e este por sua vez nos trará como resultado um valor numérico ou uma expressão, ao invés de um vetor. Vejamos o exercício abaixo, na lição é pedido que se calcule o divergente da função abaixo:

$$f(x, y, z) = xz\hat{i} + xyz\hat{j} - y^2\hat{k} \quad (2.38)$$

Para calcular o divergente de f , é bastante simples, basta derivar cada parte da expressão por sua correspondente vetorial, ou seja i, j e k será derivado respectivamente pelas derivadas parciais de x, y, z . De modo que o resultado é o seguinte:

$$\nabla \cdot \vec{f} = z + xz \quad (2.39)$$

O último termo da correspondente $\hat{k}$ é zerado pois não se tem nenhuma componente z para ser derivada, desse modo a derivada desse termo se torna uma constante e a derivada de qualquer constante é zero. Vejamos um exemplo: Sabendo que: $\nabla \cdot \vec{V} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, determine o seu divergente.

Calculando as derivadas parciais temos:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3. \quad (2.40)$$

E conforme visto a expressão é um divergente positivo.

2.2.3 Rotacional

Partindo para mais um operador vetorial, temos o rotacional de um campo vetorial, essa propriedade algébrica nos tem como resultado um vetor cujo “Os componentes x, y, z resultam na circulação desse campo vetorial por unidade de área respectivamente nos planos normais a esses componentes” [7].

Desse modo podemos definir o rotacional da seguinte forma:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Se resolvermos esse determinante, ficamos com a seguinte expressão:

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{i}(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}) - \hat{j}(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}) + \hat{k}(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}) \quad (2.41)$$

Note que na análise dos comportamentos vetoriais o rotacional não vai nos dar apenas um resultado de um vetor qualquer, ele nos mostra que se o seu resultado for nulo, significa dizer que não se tem a rotação dos vetores no campo vetorial analisado, todavia se houver alguma variação, o resultado expresso será um vetor que se curva em torno de um ponto em questão [6].

A figura 2.6 e os exemplos abaixo irão ilustrar o que se trata um rotacional com maiores detalhes.

Na figura 2.6, é possível visualizar bem o processo de um campo rotacional na prática, supondo que o vetor do campo ilustrado seja dado por: $V_a = -y\hat{i} + x\hat{j}$, vamos agora calcular o seu rotacional.

Assim temos,

$$\nabla \times \vec{V}_a = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$(0)\hat{i} - (0)\hat{j} + (\frac{\partial x}{\partial(x)} - (-\frac{\partial y}{\partial(y)}))\hat{k} = 2\hat{k} \quad (2.42)$$

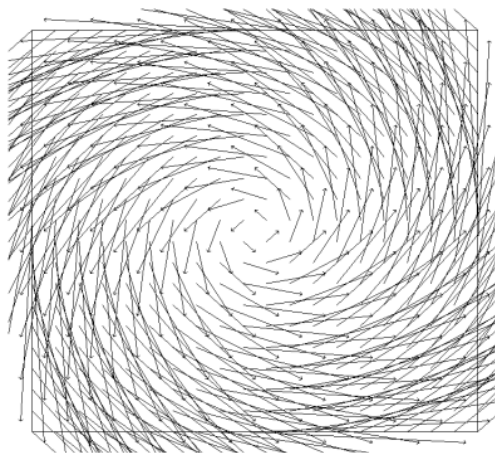


Figura 2.6: No campo vetorial ilustrado, os vetores rotacionam em sentido anti-hórario, para sabermos se existe uma rotação nesse campo, devemos calcular o rotacional e com isso saber para qual sentido o campo rotaciona a partir do resultado obtido.

2.2.4 Laplaciano

O laplaciano é mais ferramenta de operadores vetoriais que de maneira geral é um campo escalar de segunda ordem, cujo corresponde ao divergente do gradiente desse campo, ou seja, de maneira mais simples de se definir, podemos associar o laplaciano à um produto escalar do operador nabla por ele mesmo [6].

Por ser definido como o divergente do gradiente, ele é definido da seguinte maneira para uma função f :

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \quad (2.43)$$

De maneira similar ao que foi dito acima, em sua forma vetorial, onde temos um vetor $\vec{F}$ na análise, podemos defini-lo como:

$$\nabla \cdot \nabla \vec{F} = \nabla^2 \vec{F} \quad (2.44)$$

O que nos resulta em:

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \quad (2.45)$$

Note que o cálculo do laplaciano é dado pela segunda derivada parcial de cada elemento, desse modo temos o seguinte exemplo: Calcule o laplaciano de $f(x, y, z) =$

$$xz\hat{i} + 2yz\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{\partial^2(xz)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(2yz)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(z)}{\partial z^2} \quad (2.46)$$

Ficamos com o seguinte resultado:

$$\nabla^2 \vec{F} = 0 + 12yz + 0 = 12yz. \quad (2.47)$$

2.3 Coordenadas

O sistema de coordenadas é o objeto final de estudo da nossa pesquisa, os resultados serão baseados em descrevê-los utilizando a notação indicial. Nesta seção veremos as coordenadas ortogonais, as coordenadas cilíndricas e as coordenadas esféricas. Para que possamos compreender melhor as outras coordenadas, devemos primeiramente entender alguns dos conceitos básicos das coordenadas cartesianas convencionais. Veremos essa abordagem de maneira sucinta a seguir.

2.3.1 Coordenadas Ortogonais

O sistema de coordenadas cartesianas ortogonais foi criado por René Descartes, esse sistema parte inicialmente de um plano bidimensional e associa duas retas que são perpendiculares entre si, ou seja, no ponto central dessas duas retas existe um ângulo formado de 90°. Em geral associamos essas retas uma a componente horizontal x e outra a uma componente vertical y , esses eixos podem ainda ser denominados de eixo das abscissas e eixo das ordenadas respectivamente [8].

O sistema cartesiano funciona da seguinte maneira: Para cada ponto que estiver associado ao plano dessa configuração, teremos duas correspondentes nos eixos para esse ponto, ou seja, ele associa o ponto especificado a um par de componentes sendo estas o x e o y . Para representarmos um ponto P por exemplo devemos escrevê-lo da seguinte maneira $P(x, y)$, em geral a ordem de escrita deve obedecer a sequência de x ser o primeiro termo na descrição do ponto e y ser o segundo ponto [8].

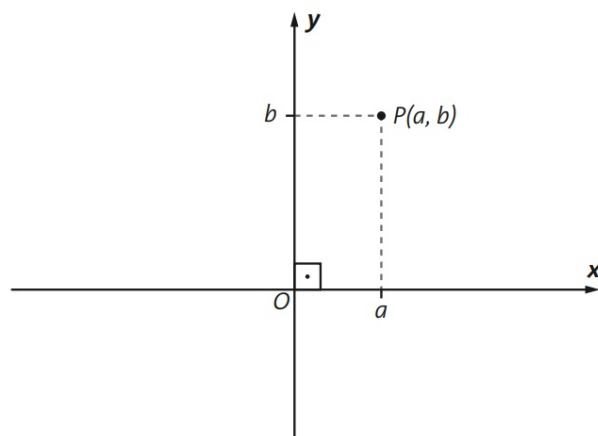


Figura 2.7: Representação de um ponto P com o par ordenado “ a ” e “ b ” marcados nos eixos de um plano cartesiano. Observe a perpendicularidade dos planos e sua interseção onde ao centro é possível indetificar a sua origem.

Os eixos das ordenadas e abscissas, possuem lados positivos e negativos, de modo que a parte superior do eixo das ordenadas é positivo enquanto a parte inferior é negativa. O mesmo ocorre com o eixo das abscissas, o lado direito corresponde a valores positivos, enquanto que o lado esquerdo possui valores negativos. As combinações de pontos entre esses lados correspondentes são denominadas de quadrantes e o ponto de interseção entre as duas retas é o ponto que denominamos de origem. O sistema cartesiano convencional, possui 4 quadrantes [8].

Note que as figuras 2.7 e 2.8, são representações para um plano com duas dimensões, se quisermos trabalhar com o espaço tridimensional, devemos adicionar mais uma coordenada ao plano cartesiano, e com isso passaremos a ter mais uma terceira coordenada que nesse caso é a z , denominada de cota. Com essa adição, temos a possibilidade de trabalharmos agora no espaço tridimensional e não mais em um plano bidimensional [9].

Aumentando-se mais uma coordenada, um ponto que esteja localizado nesse sistema passará a ter agora três posições de referência em seus eixos, e o mesmo ocorre quando aumentarmos o número da dimensão estudada. Um ponto “ P ” no espaço agora é representado por um terno ordenado “ $P(x, y, z)$ ” [9].

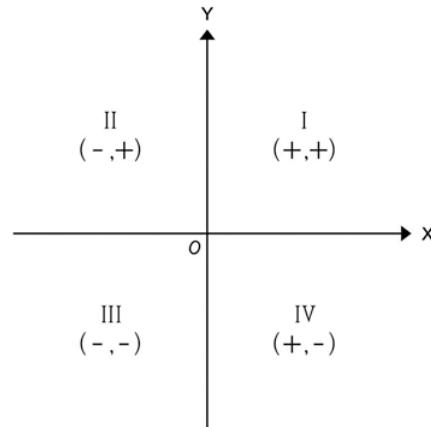


Figura 2.8: Representação dos quadrantes no sistema cartesiano, o sentido de rotação do sistema é anti-hórario. I - Representa o quadrante positivo; II - Representa o quadrante onde os valores de x serão negativos e os valores y serão positivos; III - Representa o quadrante negativo; IV Representa o quadrante onde os valores de x serão positivos e os valores de y serão negativos.

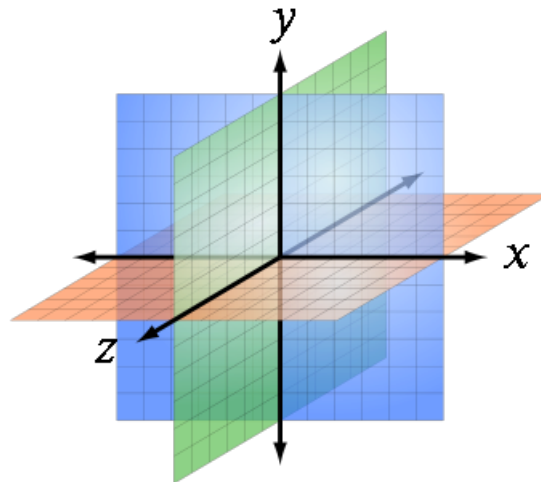


Figura 2.9: Representação do sistema tridimensional, observe a presença de três planos que se interceptam-se. Em vermelho o plano pertence ao eixo x (abscissa); Em azul o plano pertence ao eixo y (ordenada); Em verde o plano pertence ao eixo z (cota).

2.3.2 Coordenadas Cilíndricas

As coordenadas cilíndricas assemelham-se ao sistema cartesiano tridimensional, porém ao invés de utilizarmos (x,y,z) para localizar um ponto P nesse espaço, utilizamos (ρ, θ, z) . Todas as deduções necessárias para comprovar as transformações das coordenadas cartesianas retangulares em coordenadas cilíndricas, são provadas por meio de relações trigonométricas. As coordenadas de cada eixo passam a possuir uma limitação a ser respeitada [10].

Vejamos a figura 2.10 para melhor compreensão do sistema de coordenadas cilíndricas:

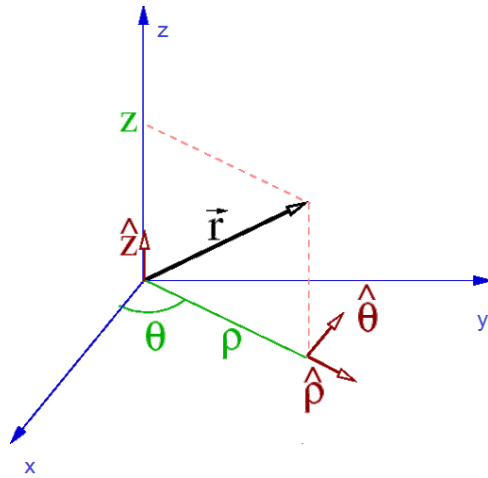


Figura 2.10: Representação do sistema ortogonal cilíndrico, veja que o vetor $\vec{r}$, possui as componentes (ρ, θ, z) como sendo as suas posições em relação ao sistema cilíndrico. Onde na mudança de coordenadas por análise trigonométrica, x no caso é $\rho \cdot \cos\theta$, y fica como $\rho \cdot \sin\theta$ e z permanece o mesmo.

Com a mudança de coordenadas, temos algumas limitações que devem ser repetidas para cada uma das componentes apresentadas, vejamos:

-Limitações do ρ

$$0 \leq \rho < \infty$$

-Limitações do θ

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

-Limitações do z

$$-\infty < z < \infty$$

Note que o z , continua com a sua mesma definição do que temos nas coordenadas cartesianas ortogonais simples. Vejamos agora o que cada um desses termos significam na análise das coordenadas cilíndricas,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.48)$$

Por análise trigonométrica, definimos as coordenadas cartesianas para cilíndricas como sendo:

$$x = \rho \cdot \cos\theta \quad (2.49)$$

$$y = \rho \cdot \sin\theta \quad (2.50)$$

O ângulo theta pode ser definido por meio do *arctg* entre y e x

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.51)$$

E a coordenada z , é uma constante, desse modo ela não sofre alterações se compararmos com o sistema cartesiano tridimensional.

$$z = Constante \quad (2.52)$$

Por fim, se observamos a figura 2.10 vemos que existe um vetor resultante na mudança das bases de (x, y, z) para (ρ, θ, z) , podemos denominar esse vetor de $\vec{r}$ assim como na figura. Logo, a mudança da base de coordenadas ortogonais simples para coordenadas cilíndricas fica com as seguintes conversões:

$$\vec{r} = (x = \rho \cdot \cos\theta, y = \rho \cdot \sin\theta, z = z) \quad (2.53)$$

Vejamos um exemplo: Qual seriam as coordenadas cilíndricas do ponto $P(1,1,1)$ que encontra-se em coordenadas cartesianas?

Temos que,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \arctg\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$z = 1.$$

Por fim temos que o ponto P agora em coordenadas cilíndricas corresponde a $P(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1)$.

2.3.3 Coordenadas Esféricas

Semelhante ao que já havíamos definindo nos tópicos anteriores, as coordenadas esféricas também representam um ponto P no espaço com três coordenadas que são elas (R, θ, ϕ) [10].

Cada um desses termos possui suas limitações em seus eixos, conforme vemos abaixo:

-Limitações do R

$$0 \leq R < \infty$$

-Limitações do θ

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

-Limitações do ϕ

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Note que diferente das coordenadas cilíndricas, as coordenadas esféricas agora possuem uma relação trigonométrica para o eixo z , cujo veremos mais adiante. Agora iremos

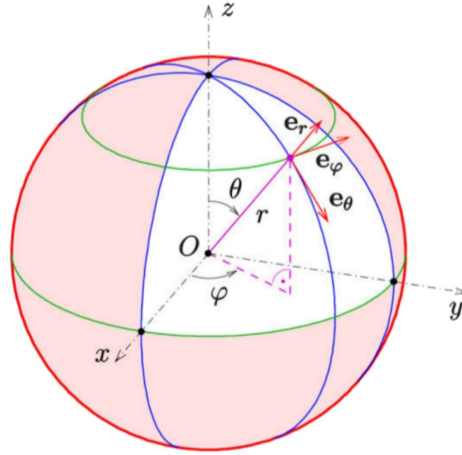


Figura 2.11: Coordenadas esféricas e suas relações trigonométricas, note que no sistema apresentado as coordenadas (x, y, z) , agora passam a serem (R, θ, ϕ) . Observe também a presença dos versores unitários $(\vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ que aparecem no ponto ao topo da figura, ou seja para cada eixo temos um novo versor unitário nas respectivas direções.

definir cada termo da mudança de coordenadas cartesianas ortogonais simples, para a base esférica.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.54)$$

Por análise trigonométrica da figura 2.11 para as coordenadas x, y, z , podemos defini-las como

$$x = R \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\phi \quad (2.55)$$

$$y = R \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi \quad (2.56)$$

$$z = R \cdot \cos\theta \quad (2.57)$$

Observando a figura 2.11 vemos que existe um vetor resultante na mudança das bases de (x, y, z) para (R, θ, ϕ) , podemos denominar esse vetor de $\vec{r}$ assim como fizemos na análise cilíndrica. Logo, a mudança da base de coordenadas ortogonais simples para coordenadas esféricas fica com as seguintes conversões:

$$\vec{r} = (x = R \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\phi, y = R \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi, z = R \cdot \cos\theta) \quad (2.58)$$

Vejamos um exemplo: Determine a equação a seguir em coordenadas esféricas: $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

Para iniciar o problema devemos abrir o produto notável da componente z, com isso ficamos com

$$(z - 1)^2 = z^2 - 2z + 1$$

Substituindo o valor acima com o da nossa pergunta temos,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 1$$

Como $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, e $z = R \cdot \cos\theta$

Ficamos agora com o seguinte,

$$R^2 - 2R \cdot \cos\theta + 1 - 1 = 0$$

$$R^2 = 2R \cdot \cos\theta$$

$$(R^2 = 2R \cdot \cos\theta) \cdot \frac{1}{R}$$

$$R = 2 \cdot \cos\theta.$$

Note que no exemplo acabamos encontrando o valor de R, se quisermos encontrar o valor das outras coordenadas, basta seguir as fórmulas e relações trigonométricas apresentadas.

Capítulo 3

Resultados

Após toda a introdução e apresentação dos recursos que utilizaremos na abordagem de nosso trabalho, veremos agora como partir do conhecimento visto em nosso referencial teórico e aplicá-lo ao nosso problema que é escrever os operadores vetoriais em coordenadas generalizadas. Com mais algumas definições que veremos aqui nos resultados, conseguiremos demonstrar um arranjo para estes operadores e aplicá-los a três exemplos sendo estes escritos em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

3.1 Definindo as equações

Antes de iniciarmos o processo de generalização das coordenadas, veremos nesta seção alguns rápidos tópicos, onde estes irão mostrar como ficam os operadores vetoriais com o uso da notação indicial de Albert Einstein. Será apresentado a seguir o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano em coordenadas generalizadas. Partindo do que foi definido no capítulo 2 veremos a junção do conhecimento da notação indicial com os operadores vetoriais.

3.1.1 Base covariante

O primeiro passo em nossa análise é definir uma base covariante, pois ela é quem definirá os vetores que irão compor a base do sistema de coordenadas analisado. O vetor covariante é o vetor do sistema de coordenadas utilizado em cada caso, esse vetor é definido por meio das derivadas parciais do sistema de coordenadas utilizado. O mesmo relaciona um sistema de coordenadas com o outro, em nossa análise utilizaremos os vetores que estão definidos nas equações 2.53 para o caso cilíndrico e 2.58 no caso esférico, com a derivação parcial de cada vetor que temos para estas coordenadas é que teremos agora a nossa base covariante onde a base é definida por, [11].

$$\vec{\epsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}. \quad (3.1)$$

Podemos notar que $\vec{r}$ é o nosso vetor que relaciona um sistema de coordenadas com outro, ou seja, esse vetor irá nos resultar os valores das coordenadas que estamos analisando seja (cilíndrica ou esférica por exemplo) e conseqüentemente após a derivação parcial por cada termo, iremos chegar em uma nova relação de coordenadas para os valores de $\vec{\epsilon}_i$, sendo estes por exemplo $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$. Em nossos cálculos iremos utilizar os vetores $\vec{r}$, definidos nas equações 2.53 e 2.58. Os termos de u^i , serão as correspondentes de cada coordenada, por exemplo u^1, u^2, u^3 tem como correspondentes no sistema tridimensional ortogonal convencional respectivamente as coordenadas (x, y, z) [10].

3.1.2 Métrica

Em nossas análises é muito importante definirmos a métrica do sistema utilizado. A métrica pode ser definida como o produto escalar g_{ij} , semelhante ao que para dois vetores ortogonais na equação 2.12. Desse modo temos:

$$g_{ij} = \vec{\epsilon}_i \cdot \vec{\epsilon}_j, \quad (3.2)$$

onde,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Todavia como os nossos exemplos irão considerar sistemas ortogonais, temos que o produto escalar será zero entre termos com índices diferentes ou seja: $g_{ij} = 0 \forall i \neq j$. Se não considerarmos sistemas ortogonais nas análises então os termos não irão zerar e deve-se considerar todos os termos da matriz métrica, mas como em nosso caso os termos diferentes somem [11].

Então nosso determinante fica apenas com:

$$g_{ii} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Desse modo para sistemas ortogonais a métrica sempre será os termos com índices iguais, no caso tridimensional ficamos apenas com g_{11}, g_{22}, g_{33} .

Outra definição importante para a métrica é a sua raiz que é definida por h_i , que é a norma do vetor base para (h_1, h_2, h_3) , com isso temos que:

$$h_i = \sqrt{g_{ii}}, \quad (3.5)$$

onde temos,

$$\|\vec{\epsilon}_i\| = \sqrt{\vec{\epsilon}_i \cdot \vec{\epsilon}_i} = \sqrt{g_{ii}} = h_i.$$

Assim,

$$\vec{\epsilon}_i = h_i \hat{\epsilon}_i. \quad (3.6)$$

Por fim para fechamos com esse tópico sobre a métrica, temos a definição do jacobiano, este por sua vez se trata da raiz da matriz métrica, uma quantidade que relaciona um sistema de coordenadas com outro. De maneira mais simples podemos dizer que o jacobiano é o produto de sua diagonal principal retirando-se a raiz quadrada desse resultado [11].

Definimos g como o valor do determinante g_{ii} . Assim temos que o jacobiano da transformação será:

$$J = \sqrt{g}. \quad (3.7)$$

onde g é o resultado do determinante g_{ii} .

3.1.3 Operadores Vetoriais Generalizados

Aqui definiremos os operadores de maneira generalizada para os cálculos posteriores da transformação dos mesmo em coordenadas cilíndricas e esféricas. Antes de apresentá-los, precisamos definir uma propriedade que são as coordenadas do vetor $\vec{F}$ nas direções “ i ”, onde $\hat{F}^i$ é o termo que analisaremos apartir da forma

$$F^i = \frac{\hat{F}^i}{h_i} \quad (3.8)$$

em que,

$$F_i = h_i \cdot \hat{F}^i \quad (3.9)$$

Com as equações definidas iremos agora definir os operadores:

- Gradiente

$$\nabla \Phi = \frac{h_i}{g_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \hat{e}_j \quad (3.10)$$

- Divergente

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{g} F^i) \quad (3.11)$$

- Rotacional

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{\epsilon}_1 & \vec{\epsilon}_2 & \vec{\epsilon}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

- Laplaciano

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} \frac{1}{g_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^j} \right) \quad (3.13)$$

3.2 Coordenadas ortogonais cartesianas na notação indicial

Agora iremos particularizar o caso para as coordenadas cartesianas ortogonais. O primeiro passo que devemos realizar é calcular as derivadas parciais do sistema cartesiano e montar a base covariante $\vec{\epsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$, em que utilizaremos o vetor correspondente ao sistema cartesiano que no caso é $\vec{r} = (x, y, z)$. Desse modo, calculando as derivadas parciais de cada coordenada ficamos com o seguinte:

$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{\epsilon}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{\epsilon}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

Como o sistema cartesiano possui ortogonalidade, temos que sua métrica será dada por g_{ii} , desse modo iremos calcular cada um dos resultados, vejamos:

- Para g_{11}

$$g_{11} = \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_1 = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)$$

$$g_{11} = 1 + 0 + 0 = 1$$

- Para g_{22}

$$g_{22} = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2 = (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0)$$

$$g_{22} = 0 + 1^2 + 0 = 1$$

- Para g_{33}

$$g_{33} = \vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_3 = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1)$$

$$g_{33} = 0 + 0 + 1^2 = 1$$

Observe que a métrica do sistema é $(g_{11} = 1, g_{22} = 1, g_{33} = 1)$, note que para qualquer cálculo que fizermos no sistema cartesiano é evidente que todos as operações terão como resultados o valor 1. Desse modo como temos a métrica do sistema cartesiano e sabemos que todos os resultados posteriores tem o mesmo valor, podemos partir para a generalização dos operadores. Ressalvando que isso ocorre apenas para o caso cartesiano ortogonal.

Assim, ficamos com a base $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, que também podemos associá-la a base canônica:

$$\vec{\epsilon}_1 = h_1 \hat{\epsilon}_1 = \hat{x} = \hat{i}.$$

$$\vec{\epsilon}_2 = h_2 \hat{\epsilon}_2 = \hat{y} = \hat{j}.$$

$$\vec{\epsilon}_3 = h_3 \hat{\epsilon}_3 = \hat{z} = \hat{k}.$$

3.2.1 Gradiente ortogonal cartesiano na notação indicial

No capítulo 2, definimos o gradiente como sendo o produto de uma função f , pelo operador nabla ∇ ,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}.$$

Na notação indicial podemos resumir os índices da base canônica $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ à apenas um índice que no caso é o $\hat{e}_i$. As coordenadas x,y,z diferenciais passam a ficar em apenas uma componente, que nesse caso pode ser o x , então ao invés de termos x,y,z, podemos ter (x_1, x_2, x_3) . Note que esses termos podem ser ainda mais compactados a uma notação de somatório e onde o somatório não precisa aparecer na equação, e com isso ficamos com x_i .

Então, podemos resumir tudo de maneira simples na equação abaixo para o gradiente considerando uma função $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$, o gradiente de f é escrito como

$$\nabla f \equiv \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, x_3), \quad (3.14)$$

que pode se resumir em:

$$\nabla f = \hat{e}_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (3.15)$$

3.2.2 Divergente ortogonal cartesiano na notação indicial

Para o divergente, definimos ele da seguinte maneira:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}.$$

De maneira bastante análoga ao que fizemos no gradiente, para termos o divergente na notação indicial, basta substituímos os termos diferenciais infinitesimais x,y,z por um único termo. Usaremos o x novamente e os índices (1,2,3) no lugar de f_x, f_y, f_z . Com isso ele passa a ficar da seguinte forma:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \quad (3.16)$$

Compactando ainda mais podemos simplificar o somatório $(f_1, f_2, f_3) = f_i$ e $(x_1, x_2, x_3) \equiv x_i$, onde ficamos com seguinte expressão para o divergente:

$$\nabla \cdot f \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (3.17)$$

3.2.3 Rotacional ortogonal cartesiano na notação indicial

Conforme vimos na definição apresentada para um produto vetorial na notação indicial na equação 2.18: $\hat{\epsilon}_i \times \hat{\epsilon}_j = \epsilon_{ijk} \hat{\epsilon}_k$, temos que o rotacional também é um produto vetorial, toda via ele é um produto vetorial de uma função vetorial pelo operador nabla. Desse modo se considerarmos um campo vetorial $\vec{f}$, ficaremos com o rotacional da seguinte maneira:

$$\nabla \times \vec{f} \equiv \epsilon_{ijk} \hat{\epsilon}_i \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j^2} \quad (3.18)$$

3.2.4 Laplaciano ortogonal cartesiano na notação indicial

Definimos o laplaciano como sendo um produto escalar do operador nabla por ele mesmo no capítulo 2, a equação definida foi a seguinte:

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}$$

seguindo o mesmo raciocínio do gradiente e do divergente, temos para o laplaciano o seguinte:

$$\nabla^2 \vec{F} \equiv \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2} \quad (3.19)$$

Observe como a notação indicial compacta os termos da derivada parcial de segunda ordem do laplaciano, e consegue ainda padronizar bem as outras equações para um modelo mais generalizado.

3.3 Coordenadas cilíndricas na notação indicial

Para as coordenadas cilíndricas, o primeiro passo que devemos realizar é calcular as derivadas parciais da base covariante $\vec{\epsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$, o vetor cujo iremos utilizar para derivar é o definido na equação 2.51 para o caso cilíndrico, $\vec{r} = (\rho \cdot \cos\theta, \rho \cdot \sin\theta, z)$. Como estamos no caso cilíndrico, temos que u^1, u^2, u^3 possui como correspondentes no sistema em análise, as coordenadas (ρ, θ, z) respectivamente. Desse modo, calculando os vetores base para esse sistema de coordenadas, ficamos com o seguinte:

$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\vec{\epsilon}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-\rho \cdot \sin\theta, \rho \cdot \cos\theta, 0)$$

$$\vec{\epsilon}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

Como o sistema cilíndrico possui ortogonalidade, temos que sua métrica será dada por g_{ii} , desse modo iremos calcular cada um dos resultados, vejamos:

- Para g_{11}

$$g_{11} = \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$g_{11} = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0$$

$$g_{11} = 1$$

- Para g_{22}

$$g_{22} = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2 = (-\rho \cdot \sin\theta, \rho \cdot \cos\theta, 0) \cdot (-\rho \cdot \sin\theta, \rho \cdot \cos\theta, 0)$$

$$g_{22} = \rho^2 \cdot \text{sen}^2\theta + \rho^2 \cdot \text{cos}^2\theta + 0$$

$$g_{22} = \rho^2(\text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta)$$

$$g_{22} = \rho^2$$

- Para g_{33}

$$g_{33} = \vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_3 = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1)$$

$$g_{33} = 0 + 0 + 1^2$$

$$g_{33} = 1$$

Com os resultados obtidos, temos que o nosso determinante da matriz métrica será

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = \rho^2$$

Com o resultado do determinante podemos calcular o jacobiano que no caso é dado por: $J = \sqrt{g}$

$$J = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

Com o resultado do jacobiano encontrado, partimos para a etapa de identificar a nova base do sistema, precisamos definir os h_i , que é a norma do vetor base para (h_1, h_2, h_3) .

conforme vimos na equação 4.5:

$$h_i = \sqrt{g_{ii}}$$

De modo que agora teremos:

$$h_1 = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{1} = 1$$

$$h_2 = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

$$h_3 = \sqrt{g_{33}} = \sqrt{1} = 1$$

Com os h_1, h_2, h_3 calculados finalmente podemos agora montar a nova base do sistema e aplica-los aos operadores vetoriais, a base foi definida na equação 4.6

$$\vec{\epsilon}_i = h_i \hat{\epsilon}_i$$

Assim, ficamos com:

$$\vec{\epsilon}_1 = h_1 \hat{\epsilon}_1 = 1 \cdot \hat{\rho} = \hat{\rho}$$

$$\vec{\epsilon}_2 = h_2 \hat{\epsilon}_2 = \rho \cdot \hat{\theta}$$

$$\vec{\epsilon}_3 = h_3 \hat{\epsilon}_3 = 1 \cdot \hat{z} = \hat{z}$$

Note que $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z})$, são versores unitários que definem as direções (ρ, θ, z) em nossa análise de coordenadas cilíndricas.

3.3.1 Gradiente em coordenadas cilíndricas

Para o gradiente em coordenadas cilíndricas teremos o seguinte:

$$\nabla \Phi = \frac{h_i}{g_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \hat{\epsilon}_j$$

$$\nabla\Phi = \frac{h_1}{g_{11}} \frac{\partial\Phi}{\partial u^1} \hat{e}_1 + \frac{h_2}{g_{22}} \frac{\partial\Phi}{\partial u^2} \hat{e}_2 + \frac{h_3}{g_{33}} \frac{\partial\Phi}{\partial u^3} \hat{e}_3$$

$$\nabla\Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \hat{\rho} + \frac{\rho}{\rho^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \hat{\theta} + \frac{1}{z} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \hat{z}$$

Que por fim temos:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \hat{\theta} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \hat{z} \quad (3.20)$$

3.3.2 Divergente em coordenadas cilíndricas

Para o divergente cilíndrico temos,

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{g} F^i)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^1} (\sqrt{g} F^1) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^2} (\sqrt{g} F^2) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^3} (\sqrt{g} F^3)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial\rho} (\rho \cdot \frac{\hat{F}_1}{1}) + \frac{\partial}{\partial\theta} (\rho \cdot \frac{\hat{F}_2}{\rho}) + \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\hat{F}_3}{1}) \right]$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial\rho} (\rho \cdot F_\rho) + \frac{\partial}{\partial\theta} (F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot F_z) \right]$$

Por fim temos,

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial\rho} (\rho \cdot F_\rho) + \frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \rho \cdot \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \quad (3.21)$$

3.3.3 Rotacional em coordenadas cilíndricas

Para o rotacional temos:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\theta & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_z - \frac{\partial}{\partial z} (\rho F_\theta) \right) \hat{\rho} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_\rho \right) \rho \hat{\theta} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\rho) \right) \hat{z} \right]$$

Por fim temos,

$$\nabla \times \vec{F} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right] \hat{\rho} - \left[\frac{\partial F_z}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial z} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot F_\theta) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} \right] \hat{z} \quad (3.22)$$

3.3.4 Laplaciano em coordenadas cilíndricas

E por fim, para o laplaciano temos:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} \frac{1}{g_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^j} \right)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\sqrt{g} \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\sqrt{g} \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\sqrt{g} \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^3} \right) \right]$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{1}{1} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho \cdot \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \cdot \frac{1}{1} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]$$

Por fim,

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (3.23)$$

3.4 Coordenadas esféricas na notação indicial

Para iniciarmos as manipulações e contas, primeiro devemos determinar a base covariante $\vec{\epsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$, o vetor cujo iremos utilizar para derivar é o definido na equação 2.58 para o caso esférico, $\vec{r} = (R \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\phi, R \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi, R \cdot \cos\theta)$. Como estamos no caso esférico, temos que u^1, u^2, u^3 possui como correspondentes no sistema em análise, as coordenadas (R, θ, ϕ) respectivamente. Desse modo, calculando a base do sistema ficamos com o seguinte:

$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial R} = (\text{sen}\theta \cdot \cos\phi, \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi, \cos\theta)$$

$$\vec{\epsilon}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (R \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi, R \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\phi, -R \cdot \text{sen}\theta)$$

$$\vec{\epsilon}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-R \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi, R \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\phi, 0).$$

Como o sistema esférico possui ortogonalidade, temos que sua métrica será dada por g_{ii} , desse modo iremos calcular cada um dos resultados, vejamos:

- Para g_{11}

$$g_{11} = \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_1 = (\text{sen}\theta \cdot \cos\phi, \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi, \cos\theta) \cdot (\text{sen}\theta \cdot \cos\phi, \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi, \cos\theta)$$

$$g_{11} = \text{sen}^2\theta \cdot \cos^2\phi + \text{sen}^2\theta \cdot \text{sen}^2\phi + \cos^2\theta$$

$$g_{11} = \text{sen}^2\theta [\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi] + \cos^2\theta$$

$$g_{11} = (\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = 1$$

- Para g_{22}

$$g_{22} = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2 = (R \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi, R \cdot \cos\theta \cdot \sin\phi, -R \cdot \sin\theta) \cdot (R \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi, R \cdot \cos\theta \cdot \sin\phi, -R \cdot \sin\theta)$$

$$g_{22} = R^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \cos^2\phi + R^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\phi + R^2 \cdot \sin^2\theta$$

$$g_{22} = R^2 [\cos^2\theta \cdot \cos^2\phi + \cos^2\theta \cdot \sin^2\phi + \sin^2\theta]$$

$$g_{22} = R^2 [\cos^2\theta (\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \sin^2\theta]$$

$$g_{22} = R^2 [\cos^2\theta + \sin^2\theta] = R^2$$

• Para g_{33}

$$g_{33} = \vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_3 = (-R \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, R \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, 0) \cdot (-R \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, R \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, 0)$$

$$g_{33} = R^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^2\phi + R^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \cos^2\phi + 0$$

$$g_{33} = R^2 [\sin^2\theta \cdot \sin^2\phi + \sin^2\theta \cdot \cos^2\phi]$$

$$g_{33} = R^2 [\sin^2\theta (\sin^2\phi + \cos^2\phi)]$$

$$g_{33} = R^2 \cdot \sin^2\theta$$

Com os resultados obtidos, temos que o nosso determinante da matriz métrica será

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \cdot \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$g = R^4 \cdot \text{sen}^2\theta$$

Com o resultado do determinante podemos calcular o jacobiano que no caso é dado por: $J = \sqrt{g}$

$$J = \sqrt{R^4 \cdot \text{sen}^2\theta} = R^2 \cdot \text{sen}\theta$$

Com o resultado do jacobiano encontrado, partimos para a etapa de identificar a nova base do sistema, precisamos definir os h_i , que é a norma do vetor base para (h_1, h_2, h_3) .

conforme vimos na equação 4.5:

$$h_i = \sqrt{g_{ii}}$$

De modo que agora teremos:

$$h_1 = \sqrt{g_1} = 1$$

$$h_2 = \sqrt{g_2} = R$$

$$h_3 = \sqrt{g_3} = R \cdot \text{sen}\theta$$

Com os h_1, h_2, h_3 calculados finalmente podemos agora montar a nova base do sistema e aplicá-los aos operadores vetoriais, a base foi definida na equação 4.6

$$\vec{\epsilon}_i = h_i \hat{\epsilon}_i$$

Assim, ficamos com:

$$\vec{\epsilon}_1 = h_1 \hat{\epsilon}_1 = 1 \cdot \hat{R} = \hat{R}$$

$$\vec{\epsilon}_2 = h_2 \hat{\epsilon}_2 = R \hat{\theta}$$

$$\vec{\epsilon}_3 = h_3 \hat{\epsilon}_3 = R \cdot \text{sen}\theta \hat{\phi}$$

Note que $(\hat{R}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$, são versores unitários que definem as direções (R, θ, ϕ) em nossa análise de coordenadas esféricas.

3.4.1 Gradiente em coordenadas esféricas

Para o gradiente em coordenadas esféricas teremos o seguinte:

$$\nabla\Phi = \frac{h_i}{g_{ij}} \frac{\partial\Phi}{\partial u^i} \hat{e}_j$$

$$\nabla\Phi = \frac{h_1}{g_{11}} \frac{\partial\Phi}{\partial u^1} \hat{e}_1 + \frac{h_2}{g_{22}} \frac{\partial\Phi}{\partial u^2} \hat{e}_2 + \frac{h_3}{g_{33}} \frac{\partial\Phi}{\partial u^3} \hat{e}_3$$

$$\nabla\Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial R} \hat{R} + \frac{R}{R^2} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{R \cdot \text{sen}\theta}{R^2 \cdot \text{sen}^2\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

Que por fim temos:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial R} \hat{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{R \cdot \text{sen}\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (3.24)$$

3.4.2 Divergente em coordenadas esféricas

Para o divergente esférico temos,

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{g} F^i)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^1} (\sqrt{g} F^1) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^2} (\sqrt{g} F^2) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^3} (\sqrt{g} F^3)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{R^2 \cdot \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \cdot \text{sen}\theta \frac{\hat{F}_1}{1}) + \frac{1}{R^2 \cdot \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (R^2 \cdot \text{sen}\theta \frac{\hat{F}_2}{R}) + \frac{1}{R^2 \cdot \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (R^2 \cdot \text{sen}\theta \frac{\hat{F}_3}{R \cdot \text{sen}\theta})$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{R^2 \cdot \text{sen}\theta} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R^2 \cdot \text{sen}\theta \frac{\hat{F}_1}{1}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R^2 \cdot \text{sen}\theta \frac{\hat{F}_2}{R}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (R^2 \cdot \text{sen}\theta \frac{\hat{F}_3}{R \cdot \text{sen}\theta}) \right]$$

Por fim temos,

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \cdot F_R) + \frac{1}{R \cdot \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen}\theta \cdot F_\theta) + \frac{1}{R \cdot \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi) \quad (3.25)$$

3.4.3 Rotacional em coordenadas esféricas

Para o rotacional temos:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{\epsilon}_1 & \vec{\epsilon}_2 & \vec{\epsilon}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\theta} & Rsen\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_R & RF_\theta & Rsen\theta F_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{R^2 sen\theta} [(\frac{\partial}{\partial \theta}(Rsen\theta F_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}(RF_\theta))\hat{R} - (\frac{\partial}{\partial R}(Rsen\theta F_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}F_R)R\hat{\theta} + (\frac{\partial}{\partial R}(RF_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}F_R)(Rsen\theta)\hat{\phi}]$$

Por fim temos,

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{Rsen\theta} [(\frac{\partial}{\partial \theta}(sen\theta \cdot F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi})]\hat{R} - \frac{1}{R} [(\frac{\partial}{\partial R}(R \cdot F_\phi) - \frac{1}{sen\theta} \frac{\partial F_R}{\partial \phi})]\hat{\theta} + \frac{1}{R} [(\frac{\partial}{\partial R}(R \cdot F_\theta) - \frac{\partial F_R}{\partial \theta})]\hat{\phi} \quad (3.26)$$

3.4.4 Laplaciano em coordenadas esféricas

E por fim, para o laplaciano temos:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{g} \frac{1}{g_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^j})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} [\frac{\partial}{\partial u^1} (\sqrt{g} \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^1}) + \frac{\partial}{\partial u^2} (\sqrt{g} \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}) + \frac{\partial}{\partial u^3} (\sqrt{g} \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial \Phi}{\partial u^3})]$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{R^2 \cdot sen\theta} [\frac{\partial}{\partial R} (R^2 \cdot sen\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{R^2 \cdot sen\theta}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\frac{R^2 \cdot sen\theta}{R^2 \cdot sen^2\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi})]$$

Por fim,

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial\Phi}{\partial R}) + \frac{1}{R^2 \cdot \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\text{sen}\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{R^2 \cdot \text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \quad (3.27)$$

Capítulo 4

Conclusão

Conforme apresentado nos resultados, podemos ver o quanto o estudo da matemática e suas propriedades conceituais do cálculo diferencial tem imensa importância para a realização de todo o estudo aqui apresentado.

Vimos como a notação indicial ajuda a diminuir contas e como ela nos mostra que as equações podem ser escritas em uma linguagem concisa e compacta para os termos. É notório que quando partimos para o estudo dos operadores nas coordenadas cilíndricas ou esféricas, vemos que a proporção dos cálculos apresentados é bem maior do que quando analisamos o sistema de coordenadas cartesiano. A partir disso um ponto crucial nesse estudo é que deve-se analisar primeiramente qual a métrica que o sistema analisado possui, visto que ele é quem dita se os resultados serão extensos ou não.

O estudo dos operadores vetoriais, se fez presente nesse trabalho, pois eles aparecem com bastante frequência nos campos da física e com cálculos bastante extensos e cansativos. As equações de Maxwell que são a base do eletromagnetismo, são comumente escritas em coordenadas cartesianas e por meio do aprofundamento do estudo aqui exposto, é possível que se tenha tais equações escritas em um sistema de equações generalizadas.

A transformação do sistemas de coordenadas se faz presente para nesse estudo, pois cada problema analisado possui a sua simetria e o seu sistema de coordenadas específico,

ter ferramentas que ajudem a facilitar os estudos ajudam bastante em futuras análises.

Todo trabalho acima nos mostra como cada disciplina de cálculo e geometria do curso de ciência e tecnologia tem a sua devida contribuição para que cada conceito e definição tenha o devido encaixe. Aqui encerramos com a seguinte frase de Albert Einstein: “O importante é nunca parar de questionar. A curiosidade tem sua própria razão para existir”.

Referências Bibliográficas

- [1] MEDERANO-BALBOA, R. A. *Campos vetoriais, Espaços lineares e tensores na física*. 1^a. ed. São José dos Campos - São Paulo: Transtec Editorial, 1994.
- [2] UNICAMP. *Apêndice A - Notação indicial*. Fem Unicamp, 1999. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em421/semII-1999/textos/ni.pdf>>. Acesso em: 25 nov. 2020.
- [3] WINTERLE, P. *Vetores e geometria analítica*. 1^a. ed. São Paulo: Pearson Markron Books, 2000.
- [4] STEWART, J. *Cálculo*. Tradução de EZ2translate. 7^a. ed. São Paulo: Cengage Learning, vol. 2, 2013.
- [5] THOMAS, G. B. *Cálculo*. 12^a. ed. São Paulo: Pearson, vol. 2, 2012.
- [6] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. 3^a. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [7] GRAÇA, C. *Cálculo vetorial*. UFSM. Roraima, 2012.
- [8] SILVA, L. P. M. *O que é plano cartesiano?*. Brasil escola, 2020. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-plano-cartesiano.htm>>. Acesso em: 1 dez. 2020.
- [9] BIZELLI, M. H. S. S. *Funções de várias variáveis - sistema tridimensional de coordenadas*. RER online, 2020. Disponível

em: <<http://calculo.iq.unesp.br/sitenovo/Calculo1/tridicoordenadas.html>>.

Acesso em: 29 nov. 2020.

- [10] ARFKEN, G.; WEBER, H. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Tradução de Arlete Simille Marques. 6^a. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda, 2007.
- [11] BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. 1^a. ed. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.