



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE CARAÚBAS
INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

FRANCISCO FÁBIO OLIVEIRA DOS SANTOS

**AS TRANSFORMADAS DE FOURIER E *WAVELET*: UM BREVE CONTEXTO
HISTÓRICO E SUAS APLICAÇÕES**

CARAÚBAS/RN

2023

FRANCISCO FÁBIO OLIVEIRA DOS SANTOS

**AS TRANSFORMADAS DE FOURIER E *WAVELET*: UM BREVE CONTEXTO
HISTÓRICO E SUAS APLICAÇÕES**

Monografia apresentada ao conselho de Curso
Bacharelado em Ciência e Tecnologia da
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
como requisito para obtenção do título de
Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Prado de
Medeiros

Co-orientadora: Prof. Dr^a. Tania Luna Laura

CARAÚBAS/RN

2023

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

SS237 SANTOS, FRANCISCO FÁBIO OLIVEIRA DOS.
t AS TRANSFORMADAS DE FOURIER E WAVELET: UM
BREVE CONTEXTO HISTÓRICO E SUAS APLICAÇÕES /
FRANCISCO FÁBIO OLIVEIRA DOS SANTOS. - 2023.
42 f. : il.

Orientador: Rodrigo Prado de Medeiros.
Coorientador: Tania Luna Laura.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2023.

1. Transformadas de Fourier. 2. Transformadas
wavelets. 3. aplicações. I. Medeiros, Rodrigo
Prado de, orient. II. Laura, Tania Luna, co-
orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Caraúbas
Bibliotecária: Dalvanira Brito Rodrigues
CRB: 15/700

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

FRANCISCO FÁBIO OLIVEIRA DOS SANTOS

**AS TRANSFORMADAS DE FOURIER E *WAVELET*: UM BREVE CONTEXTO
HISTÓRICO E SUAS APLICAÇÕES**

Monografia apresentada ao conselho de Curso
Bacharelado em Ciência e Tecnologia da
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
como requisito para obtenção do título de
Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: __13__ / __10__ / 2023.

BANCA EXAMINADORA



Documento assinado digitalmente

RODRIGO PRADO DE MEDEIROS

Data: 20/10/2023 18:57:53-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rodrigo Prado de Medeiros (UFERSA)

Presidente



Documento assinado digitalmente

TANIA LUNA LAURA

Data: 21/10/2023 15:59:36-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr^a. Tania Luna Laura (UFERSA)

Co-orientadora

Documento assinado digitalmente



JOSE AILTON LEO BARBOZA JUNIOR

Data: 21/10/2023 09:56:53-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

José Ailton L. F.

A)

MEMBRO EXAMINADOR



Documento assinado digitalmente

THAIS MILLA SIMÃO ARAÚJO

Data: 21/10/2023 11:22:56-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Thaís Milla Simão Araújo, Ms. (INPE)

Membro Examinador

*Dedico à minha mãe, Benedita Oliveira (Tetê).
Que mesmo sem saber o impacto que me
causaria no futuro me incentivou a valorizar os
estudos desde criança. Apesar de termos
enfrentado momentos difíceis, mas tudo foi
recompensado. Gratidão mãe!*

AGRADECIMENTOS

Ao grandioso Deus, autor e consumidor de nossa fé, sem Ele nada disso teria sido possível, gratidão Senhor por tudo.

Aos meus pais, Benedita Oliveira dos Santos e Francisco Afonso dos Santos (in memoriam). Em especial a minha mãe que desde quando assumiu o papel de pai único sempre buscou nos influenciar a buscarmos um futuro melhor através da educação, e isso fez muita diferença na minha vida.

À minha esposa, Débora Leiliane Ferreira Brito de Oliveira, por todo apoio que sempre tem me dado. Em momentos de angústias e reflexões acerca do curso foi quem me impulsionou a continuar, principalmente nesses últimos dias que foram momentos bem corridos, mas ela entendeu que estávamos nesse processo juntos.

Aos meus irmãos, Francinildo Oliveira dos Santos, Francinaldo Oliveira dos Santos e Francisco Afonso dos Santos, que desde cedo perceberam a minha vocação pelos estudos, e sempre entenderam e não mediram esforços para me ajudar no que eu precisasse.

Aos meus sogros, Lania Maria e José Vanderlan, que são uns verdadeiros pais para mim, e muito tem contribuído em todo esse processo.

A todos os meus professores da UFRSA, que me ajudaram na conquista de mais um sonho. Agradeço em especial ao Prof. Dr. Rodrigo Prado de Medeiros, que não mediu esforços em me ajudar nessa finalização de Curso mesmo estando em outra instituição de ensino. E a minha coorientadora a Profa. Dr^a Tania Luna Laura, por todas as contribuições feitas nessa pesquisa, gratidão por tudo.

Aos meus irmãos em Cristo, pela ajuda em orações. Em especial, agradeço a minha amiga e irmã, Thaise wine, por toda colaboração nesses últimos dias, é o verdadeiro exemplo da citação bíblica em provérbios 17:17, ou seja, uma irmã na hora da angústia.

Por fim, a todas pessoas que contribuíram de forma direta ou indiretamente para que eu conseguisse alcançar mais um objetivo, dos colegas de transporte universitário aos colegas de classe, minha gratidão é imensa a todos.

“As raízes do estudo são amargas, mas os seus
frutos são doces.”

Aristóteles

RESUMO

As Transformadas de Fourier são aplicadas em análises de sinais e sabe-se o quanto esta ferramenta Matemática é poderosa para tal. Assim, ao analisar funções senoidais estacionárias deparamos com suas aplicações práticas, por isso, sua importância em diversas áreas das ciências exatas é imensurável. No entanto, com o passar do tempo e a evolução científica foram surgindo problemas quanto a análise sinais não estacionários. Assim, foi verificado que às Transformadas de Fourier não são eficientes para sinais desta natureza. E é nesse impasse que houve uma motivação para a presente pesquisa. Cientistas, como Dennis Gabor percebendo que às Análises de Fourier não seriam ideais para a análise de sinais não estacionários realizou alterações na mesma, chegando a uma evolução, implantando uma espécie de janela, ou seja, a função agora seria analisada por regiões, por isso, ficou denominada de Transformada Janelada de Fourier ou também conhecida como Transformada de Fourier de Tempo Restrito. No entanto, apesar do feito extraordinário de Gabor, foram aparecendo algumas inconsistências nas janelas, especificamente devido à escolha de seu tamanho, que não poderia ser variante. Com isso, novos estudos aconteceram até que houve nova reformulação, devido a necessidade em seus estudos, Jean Morlet agora promove um grande avanço na área de análises de sinais, conseguindo sanar o problema com as janelas invariantes surgem às Transformadas *wavelets*. Esta nova função é baseada em escala e translação, ou seja, novos parâmetros foram incrementados para que o problema e a deficiência da análise com as Transformadas de Fourier não fosse mais tanto prejudicial a comunidade científica. Portanto, partindo dessa ideia de ineficiência das TF este trabalho expõe um contexto histórico evolutivo das novas formas de analisar um sinal até chegar às *waveltes*, tendo um arcabouço teórico e por fim apresentando algumas aplicações das Transformadas waveletes, pontuando suas vantagens sobre as Transformadas de Fourier.

Palavras-chave: Transformadas de Fourier; Transformadas *wavelets*; aplicações.

ABSTRACT

Fourier transforms are applied in signal analysis, and we know how powerful this mathematical tool is for this occasion. Thus, when we analyze stationary sinusoidal functions, we come across their practical applications, which is why their importance in various areas of exact sciences is immeasurable. However, with as time going by and scientific developments, problems arose regarding the analysis of non-stationary signals. Thus, has been verified that Fourier Transforms are not efficient for signals of this nature. And it is in this impasse that there was a motivation for the present research. Scientists, such as Dennis Gabor, realizing that Fourier Transforms would not be ideal for the analysis of non-stationary signals, had to make changes to it, reaching an evolution, implementing a kind of window, that is, the function would now be analyzed by regions, by this was called Windowed Fourier Transform or also Restricted Time Fourier Transform. However, despite Gabor's extraordinary achievement, some inconsistencies appeared in the windows, specifically due to the choice of their size, which could not be varied. With this, new studies took place until there was a new reformulation, due to the need in his studies, Jean Morlet now promotes a great advance in the area of signal analysis, managing to solve the problem with the invariant windows arising from the Wavelet Transforms. This new function is based on scale and translat, in other words, new parameters were increased so that the problem and deficiency of analysis with Fourier Transforms would no longer be so detrimental to the scientific community. Therefore, starting from this idea of TF inefficiency, this work exposes an evolutionary historical context of new ways of analyzing a signal until arriving at Wavelets, having a theoretical framework and finally presenting some applications of Wavelet Transforms, highlighting their advantages over Fourier Transforms.

Keywords: Fourier transforms; Wavelet Transforms; applications.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Fourier (1768-1830).....	16
Figura 2 - Senoide	18
Figura 3 - Componentes fundamental e harmônicas de um sinal.....	19
Figura 4 - Onda quadrada	19
Figura 5 - a) Sinal de tempo contínuo periódico. b) Decomposição em sinais de frequências fundamentais.....	21
Figura 6 - a) Sinal discreto no tempo. b) Magnitude dos fasores de frequências distintas que compõem o sinal discreto.	22
Figura 7 - a) Sinal de registro de oscilografia. b) Frequências que compõem o sinal, obtidas a partir da TF.	23
Figura 8 - Dennis Gabor (1900 - 1979).....	24
Figura 9 - Espectro dividido em 8 regiões por janelas retangulares.....	25
Figura 10 - STFT (Short-Time Fourier Transform) – Dennis Gabor (1946)	25
Figura 11 - Resolução no plano tempo e frequência. a) obtido pela STFT. b) obtido pela TW.	26
Figura 12 - Jean Morlet (1931-2007)	27
Figura 13 - <i>Wavelet</i> de Morlet.....	29
Figura 14 - Formas de onda da wavelet de Morlet sem normalização	30
Figura 15 - <i>Wavelets</i> -mães	31
Figura 16 - Diagrama de bloco ilustrando a decomposição do primeiro nível da TWD.....	34
Figura 17 - Cálculo dos coeficientes escala e wavelets de um sinal	35
Figura 18 - Sinal analisado com a Transformada de Fourier	37
Figura 19 - Ilustração das bandas de frequências dos coeficientes escala e wavelet	38
Figura 20 - Cálculo dos coeficientes wavelets e escala.....	38

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
SF	Séries de Fourier
TF	Transformada de Fourier
TFC	Transformada de Fourier Contínua
TFD	Transformada de Fourier Discreta
TW	Transformada <i>Wavelet</i>
TWC	Transformada <i>Wavelet</i> Contínua
TWD	Transformada <i>Wavelet</i> Discreta
TWDR	Transformada <i>Wavelet</i> Discreta Redundante
WFT	<i>Windowed Fourier Transform</i>
STFT	<i>Shot Time Fourier Transform</i>

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
2 OBJETIVOS.....	15
2.1 Objetivo geral.....	15
2.2 Objetivos Específicos.....	15
3 REFERENCIAL TEÓRICO.....	16
3.1 Introdução às Transformadas de Fourier e um Breve Histórico.....	16
3.1.1 Conceitos Básicos - Séries de Fourier.....	17
3.1.2 Transformadas de Fourier Contínuas.....	20
3.1.3 Transformadas de Fourier Discretas.....	21
3.1.4 Transformadas Janelada de Fourier (de Gabor).....	23
3.2 Introdução às Transformadas <i>Wavelets</i> e um Breve Histórico.....	26
3.2.1 Tranformadas <i>Wavelets</i> Contínuas.....	29
3.2.2 Análise de Multiresoluções.....	32
3.2.3 Transformadas <i>wavelets</i> discretas.....	32
4 APLICAÇÕES DAS TRANSFORMADAS DE FOURIER E <i>WAVELET</i>.....	36
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	38
REFERÊNCIAS.....	40

1 INTRODUÇÃO

Sabe-se que atualmente há uma imensa diversidade quando se trata de análise de dados relacionados a frequências e sinais, e muitos deles possuem várias aplicações. Por exemplo, os sinais senoidais surgem naturalmente na descrição do movimento dos planetas e do comportamento periódico do clima da Terra. Fontes de corrente alternada geram tensões e correntes senoidais, compressão de imagens e sons, entre outras. Ferramentas matemáticas, como as Transformadas de Fourier e *wavelet* são imprescindíveis para análises desse tipo de fenômenos e que serão revisados neste trabalho.

A representação de um sinal no domínio do tempo está presente, naturalmente, no nosso cotidiano (basta imaginar o comportamento de qualquer grandeza que varie ao longo tempo, como por exemplo: preço do dólar, temperatura ao longo do dia e etc). No entanto, algumas operações tornam-se mais simples e esclarecedoras se optarmos por trabalhar no domínio da frequência, obtido, por exemplo, a partir da TF.

Assim, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) foi um Matemático e Físico francês, celebrado por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, conhecidas como Séries de Fourier (SF) e, a sua aplicação aos problemas na condução de calor. O matemático, no século XVII, demonstrou que qualquer forma de onda poderia ser representada por um somatório de senoides e cossenoides de diferentes frequências, amplitudes e fases. A técnica para fazer transformação de integrais de $f(t)$ do domínio do tempo para o domínio da frequência é chamada de Transformada de Fourier (SADIKU, 2013).

A utilização de um número infinito de amostras no domínio do tempo e, conseqüentemente, um número infinito de pontos no domínio da frequência, representa um problema para a implementação prática da Transformada de Fourier (implementação em computador).

Transformada de Fourier Discreta (TFD) é a versão discreta da TF, a qual utiliza um número finito de pontos no domínio do tempo e define uma representação discreta do sinal no domínio da frequência.

Alguns problemas apresentam soluções bastante complexas. Em algumas aplicações, é mais fácil resolver o problema transformado e aplicar a transformada inversa na solução. Uma das ferramentas matemáticas mais utilizadas nas ciências de um modo geral é a Transformada de Fourier (EDUARDO, 2018).

No entanto, a transformada de Fourier é inadequada na análise de séries temporais não-estacionárias, as quais não costumam apresentar as mesmas componentes de frequência durante sua duração. Uma alternativa para isso é a adoção de uma base de funções específicas denominadas *wavelets*, que permitem obter informação no domínio da frequência, também obtém informação no domínio do tempo. A função *wavelet* é a interpretação de uma onda de curta duração com crescimento e decrescimento rápidos. Sua teoria baseia-se na representação de funções em diferentes escalas e resoluções (tempo-escala), considerando assim uma das suas principais características (DAUBECHIES, 1992).

O primeiro registro do termo *Wavelets* data de 1909, em uma tese de Alfred Haar, apresentando uma função que, décadas depois, viria a ser conhecida como a primeira função *wavelet*. A transformada *wavelet*, é um avanço recente em processamento de sinais que tem atraído muita atenção a partir de desenvolvimento teórico em 1984 por Grossman e Morlet (1984). Seu uso tem aumentado rapidamente como uma alternativa à TF em preservar os fenômenos locais, não-periódicos e de multiescala. O termo *wavelet* vem do termo francês ondelette, significando onda pequena.

De um modo geral, as *wavelets* permitem descrever através de uma função, os detalhes do mais genérico ao mais específico, independentemente da função corresponder a uma imagem, curva, superfície, ou um sinal. As *wavelets* suprem as deficiências que foram encontradas na Transformada de Fourier, assim, tornando-se, mais aplicável em situações onde a Transformada de Fourier não propunha uma resposta aceitável.

Uma série temporal (ou sinal) não-estacionária é definida basicamente, como aquela que possui algum tipo de tendência e/ou sazonalidade. Nesse sentido, por quê a transformada de Fourier, que tem sido universalmente utilizada desde a sua criação nas mais diversas aplicações, apresenta limitações na análise destes sinais? E qual seria a vantagem da utilização da transformada *wavelet* sobre a transformada de Fourier na análise destes sinais?

Diante dessa vasta importância no campo da Matemática aplicada às engenharias e demais linhas de pesquisas afins, a leitura desta pesquisa sobre a temática deve gerar uma boa discussão teórica e prática, bem como incentivar novos estudos nessa área.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

A presente pesquisa, de modo geral objetiva mostrar, seguindo a evolução do contexto histórico que as transformadas *wavelets* surgiram da necessidade de analisar sinais em séries temporais não-estacionárias, visto que, para esse caso, as transformadas de Fourier não são eficientes. E além disso, apresentar aplicações práticas das transformadas de Fourier e *wavelets*.

2.2 Objetivos Específicos

- Enfatizar a importância das Transformadas de Fourier e *wavelets*, seguindo a linha do tempo do surgimento das Transformadas de Fourier à necessidade de uma da implementação das *wavelets*;
- Expor diversos estudos sobre a temática, objetivando o incentivo a novas pesquisas nesse campo que é de suma importância para as engenharias, Física, Matemática aplicada, entre outras;
- Utilizar recursos computacionais como o software *MATLAB* para analisar e realizar a apresentação de alguns sinais em que as transformadas de Fourier e *wavelets* são aplicadas.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Introdução às Transformadas de Fourier e um Breve Histórico

Nascido em Auxerre, França, Jean Baptiste Joseph Fourier Figura 1, tornou-se órfão aos 8 anos. Frequentou colégio militar de sua cidade, dirigido por monges beneditinos, onde demonstrou grande competência em matemática. Como a maioria de seus contemporâneos, foi arrastado pelos ideais da Revolução Francesa. Fourier teve importante participação nas expedições de Napoleão ao Egito no final dos anos de 1790. Em consequência de seu envolvimento político, escapou da morte por duas vezes (SADIKU, 2013).

O matemático francês, apresentou, pela primeira vez, as séries e transformadas que levam seu nome, em que seus resultados não foram recebidos com entusiasmo pelo mundo científico. Ele não teve a oportunidade de ter seu trabalho publicado como um artigo científico (SADIKU, 2013).

Figura 1 - Fourier (1768-1830)



Fonte: SAPATIVA, 2017.

A série Fourier, proposta por volta de 1800, concedeu os fundamentos para a análise de sinais moderna e para uma vasta gama de pesquisas matemáticas realizadas nos séculos XIX e XX. Fourier introduziu o conceito de uma função arbitrária, mesmo contendo descontinuidades, poderia ser desenvolvida por uma única expressão analítica. Suas pesquisas terminaram por fornecer o alicerce para muitos avanços na matemática, ciência e engenharia.

A Transformada de Fourier é uma transformação de integrais de $f(t)$ no domínio do tempo para o domínio da frequência. É uma técnica utilizada principalmente no processamento de sinais e tem como objetivo a transformação de um sinal (função) do domínio do tempo para o domínio de frequência (GONZALEZ, 1992).

Na maioria dos casos os métodos de manutenção preditiva são baseados na análise de sinais de vibração e de sinais acústicos. Várias técnicas de análise de sinais têm sido utilizadas para monitoração de máquinas; entre estes, os métodos de análise espectral, baseados na transformada de Fourier.

A característica da transformada de Fourier, que a torna uma valiosa ferramenta de análise é a sua aptidão para decompor funções não periódicas, tais como sinais resultantes de sensores que captam vibrações de máquinas, ou um sinal sonoro complexo, em uma série de funções de uma base ortonormal, composta por senos e cossenos. Os coeficientes destas funções da base ortonormal, representam a contribuição das componentes de seno e cosseno do sinal em todas as frequências. Isto possibilita a análise do sinal em termos de suas componentes de frequência.

3.1.1 Conceitos Básicos - Séries de Fourier

Fourier, no século XVII, demonstrou que qualquer forma de onda poderia ser representada por uma somatória de senóides e cossenóides de diferentes frequências, amplitudes e fases. Na Figura 2 é ilustrada uma forma de onda senoidal, que pode ser descrita matematicamente como:

$$x(t) = A \sin (\omega t + \varphi), \quad (1)$$

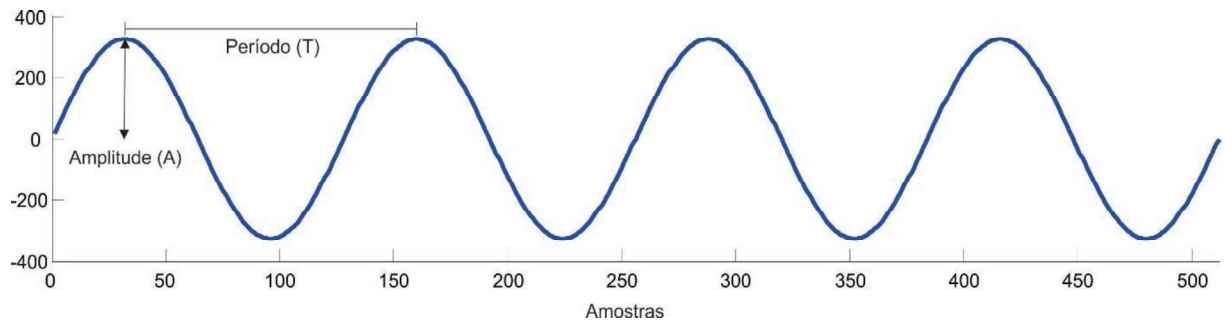
Onde:

$\omega = 2\pi f$ dado em rad/s ;

$f = \frac{1}{T}$, sendo medida em Hz ;

φ corresponde ao ângulo de fase.

Figura 2 - Senoide



Fonte: Próprio autor.

A representação de um sinal periódico por uma série de Fourier é dada da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{f}$$

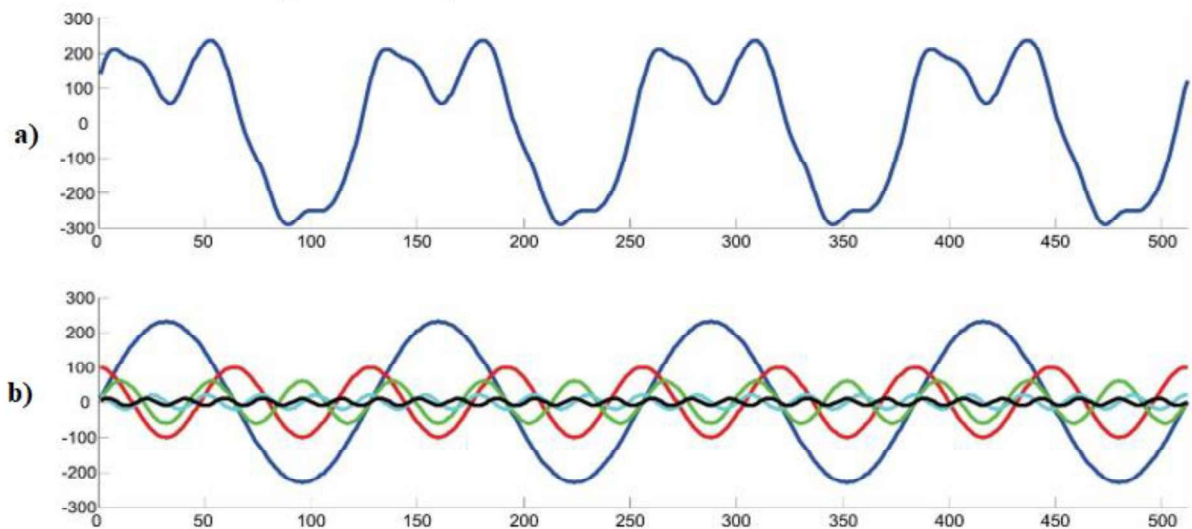
Os coeficientes de a_0 , a_k e b_k são números que variam de acordo com a função que será representada de período fundamental T . No entanto, pode-se calcular os coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) dt \quad (2.1)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \quad (2.2)$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \quad (2.3)$$

Figura 3 - Componentes fundamental e harmônicas de um sinal.



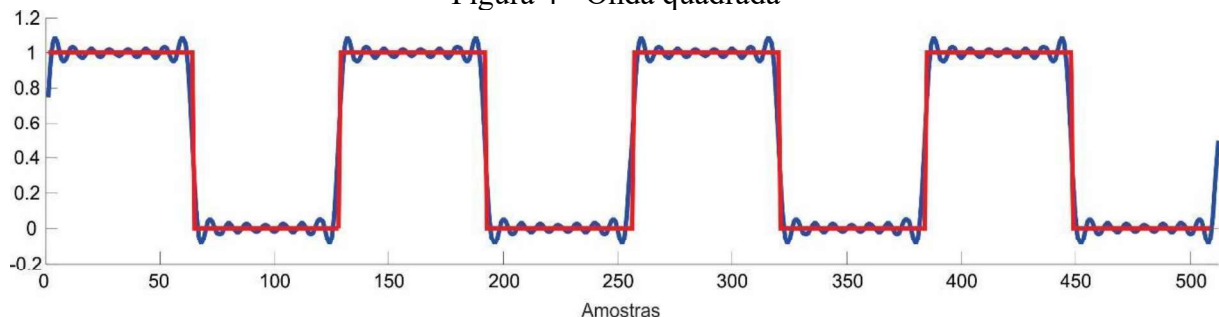
Fonte: Próprio autor.

Na Figura 3(a) é ilustrado um sinal composto por um somatório de senóides com múltiplas frequências e amplitudes. Na Figura 3(b), todas estas componentes harmônicas são ilustradas separadamente. A equação que descreve o sinal ilustrado na Figura 3(b) é:

$$f(t) = 230 \sin \omega t + 60 \sin 3\omega t + 10 \sin 7\omega t + 100 \cos 2\omega t + 20 \cos 5\omega t \quad (3)$$

O exemplo na Figura 4 é ilustrada uma onda quadrada, a qual pode ser obtida a partir do somatório de infinitas senoides com frequências ímpares múltiplas inteiras da frequência fundamental, ω .

Figura 4 - Onda quadrada



Fonte: Próprio autor.

A equação que descreve a onda quadrada é dada como sendo:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\omega t + \frac{2}{7\pi} \sin 7\omega t + \dots \quad (4)$$

Neste caso em particular está sendo representado uma onda quadrada como função ímpar, ou seja, $f(t) = -f(-t)$, sendo desta forma expressa somente os termos em seno ($a_k = 0$ na equação 2.2), uma vez que o seno é uma função ímpar.

3.1.2 Transformadas de Fourier Contínuas

A função que representa essa transformada tem a seguinte composição matemática:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

$$f(t) = F^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6)$$

Onde:

$f(t)$: sinal de tempo contínuo;

ω : frequência angular em rad/s;

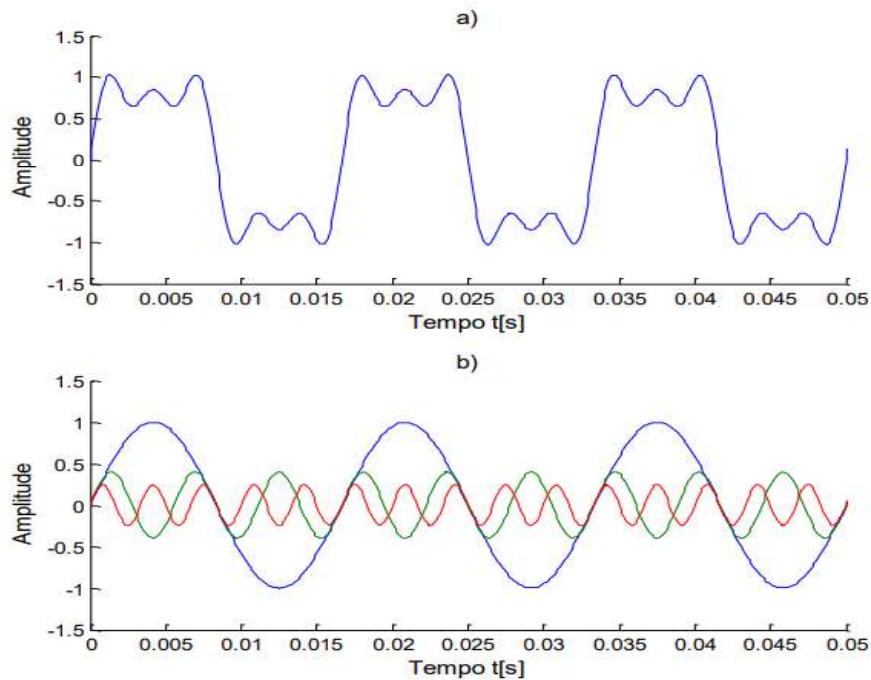
$F(\omega)$: sinal contínuo da frequência ω .

$F(\omega)$ é denominada Transformada de Fourier de um sinal contínuo, sua magnitude é denominada espectro de amplitudes, enquanto sua fase é chamada espectro de fases. Logo, $F(\omega)$ é o espectro.

A equação abaixo representa a transformada inversa de Fourier de um sinal contínuo. Como o próprio nome sugere, ela transforma a função no domínio da frequência para o domínio do tempo.

Ao aplicar a TF em um sinal analógico ou de tempo contínuo, é possível reproduzir as senoides fundamentais que formam este sinal. Na Figura 5 mostra um exemplo de sinal que é composto por várias senoides de diferentes frequências e amplitudes.

Figura 5 - a) Sinal de tempo contínuo periódico b) Decomposição em sinais de frequências fundamentais



Fonte: Pereira, 2016.

A Equação 5 (Transformada de Fourier de um sinal contínuo) é limitada pela impossibilidade de relacionar os intervalos de tempo com as frequências. Tal problema sucede porque a transformada baseia-se em integrar toda a função para poder obter cada frequência. Se o sinal fosse estacionário descartar-se-ia este problema, porém, grande parte dos sinais de interesse apresenta características não estacionárias como mudanças repentinas, início e final de um evento, fluxos e tendências, características estas que, em análise de sinais, são muito relevantes, na verdade são as mais importantes (BIANCHI, 2006).

3.1.3 Transformadas de Fourier Discretas

Um sistema de som permite alterar amplitudes de bandas de frequências específicas em uma música, realizando sua mixagem, eliminando ruídos indesejados ou criando uma nova versão da música original. Esse tipo de aplicação pode ser realizado em um arquivo de áudio digital com dados discretos, por exemplo, no formato mp3, utilizando a Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform) que pode ser definida como na equação abaixo.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} \quad (7)$$

$$\frac{k}{N} \cong f$$

$$n \cong t$$

Onde:

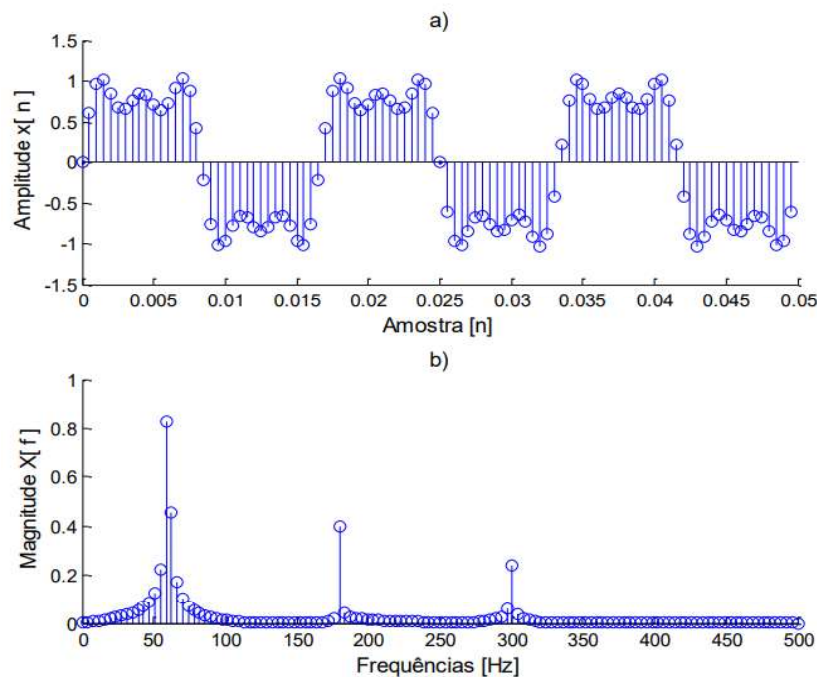
$x[n]$: sinal discreto como $(N - 1)$ amostras;

$X[k]$: sinal discreto transformado em $k = 0, \dots, N - 1$.

Essa transformada é utilizada para estudar sinais no tempo discreto que sejam ilimitados no tempo (ainda que não tenha todas as amostras definidas). Decompõem-se $x[n]$ como uma combinação linear de exponenciais complexas.

Este tipo de análise em sinais discretos é exemplificado na Figura 6 que, através da aplicação da TFD, mostra as frequências que compõem um sinal discreto no tempo.

Figura 6 - a) Sinal discreto no tempo. b) Magnitude dos fasores de frequências distintas que compõem o sinal discreto.

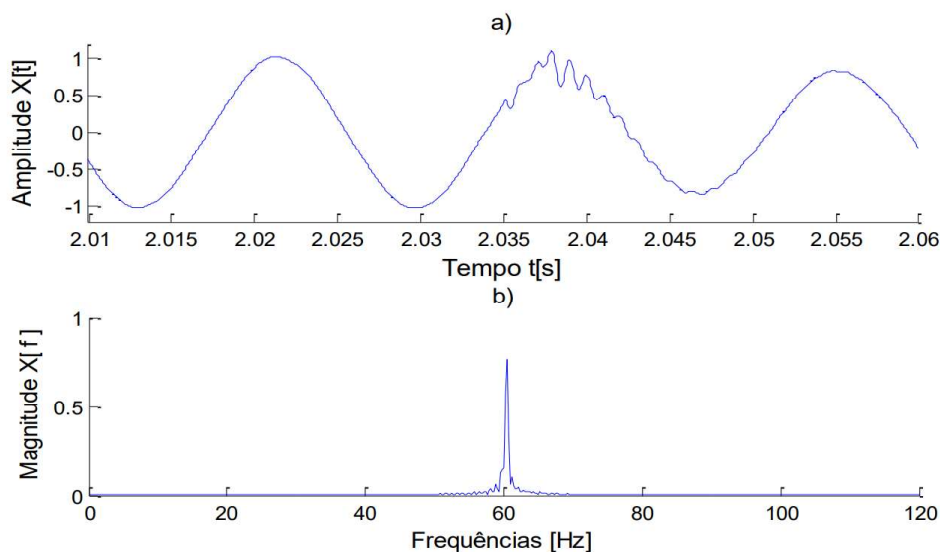


Fonte: Pereira, 2016.

A Transformada de Fourier é capaz de identificar quais as frequências estão presentes em um sinal, porém não é capaz de informar qual a localização no domínio temporal onde ocorreu determinado pico de frequência. Sendo essa uma das grandes desvantagens da análise de Fourier (espectro), ou seja, o fato de que ela apresenta apenas resolução na frequência e não no tempo. Isto significa que, embora capaz de determinar o conteúdo de frequências presentes

em um sinal, não há noção de quando (em que intervalo de tempo) elas ocorrem. Isso fica mais evidente quando aplicamos a TF em um sinal não estacionário, como exemplificado na Figura 7, em que na parte a) é exposto um sinal de registro de oscilografia e na parte b) são as frequências que compõem o sinal, sendo obtida através da aplicação da TF.

Figura 7 - a) Sinal de registro de oscilografia b) Frequências que compõem o sinal, obtidas a partir da TF



Fonte: Pereira, 2016.

Então, agora seria necessária uma evolução nas TF para que pudesse melhorar a eficiência em sinais não estacionários, assim, houve uma adaptação por meio de janelas na TF, o responsável por essa modificação foi o físico Dennis Gabor, esta nova função tratada no subtópico seguinte.

3.1.4 Transformadas Janelada de Fourier (de Gabor)

A Figura 8 ilustra a imagem de Dennis Gabor (1900 – 1979), este foi um físico, Engenheiro eletricitista e inventor húngaro-britânico conhecido pela invenção e aperfeiçoamento da holografia, um sistema de fotografia tridimensional sem lente que tem muitas aplicações, pela qual foi laureado com o Nobel de Física de 1971.

Figura 8 - Dennis Gabor (1900 - 1979)



Fonte: BELÉNDEZ, 2007.

A Transformada de Fourier apresentou uma deficiência referente à localização no tempo de um sinal decomposto em suas diversas frequências. Em 1946, Dennis Gabor percebeu que a Transformada de Fourier em séries temporais não-estacionárias, possuía essa deficiência de aplicabilidade, sendo esses casos a maioria dos fenômenos que encontramos, como as frequências de áudio e elétricas. Para resolver essa deficiência Gabor modificou a Transformada de Fourier visando uma melhor representatividade de séries temporais (SILVA, Aldo. 2014).

Uma das limitações da TF encontra-se no fato de que ela não permite analisar em separado diferentes trechos do sinal. Assim, caso um trecho seja extremamente ruidoso ou contenha pontos anômalos, o processamento de todo o sinal é comprometido. Com isso, Dennis Gabor, adaptou a TF para analisar só uma pequena porção do sinal em um tempo, introduzindo a chamada transformada por janelas de Fourier (*windowed Fourier Transform – WFT*). Nesse caso, uma janela de observação é deslocada no domínio do tempo e a transformada de Fourier da porção visível do sinal é calculada para cada posição da janela (BIANCHI, 2006). Pode-se definir a transformada por janelas de Fourier de um sinal contínuo como:

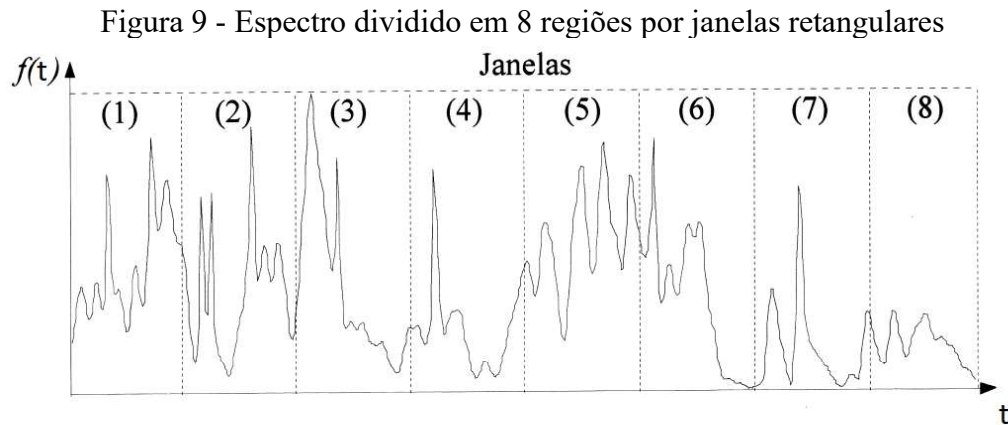
$$F(\omega, b) = \int j(t - b) f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (8)$$

Onde:

$j(t - b)$: a função janela centrada em t e de largura b ;

$F(\omega, t)$: sinal contínuo da frequência ω para cada janela.

Sendo $u(t)$ a função que cumpre o papel de janela, responsável pela delimitação do trecho que está sendo considerado no sinal. A posição da janela dentro do sinal é dada pelo parâmetro b . A Figura 9 a seguir ilustra a forma em que essas janelas são configuradas na *WFT*.



Fonte: Galvão, 2001 (Adaptado)

Esta técnica possibilita a obtenção de uma análise substancial das frequências, porém dependemos do tamanho da janela que pode ou não perder informações encontradas nos sinais. A mesma também ficou conhecida como Transformada de Fourier de Tempo Restrito (*Short Time Fourier Transform*, ou *STFT*), ilustrado novamente na figura 10.

Figura 10 - STFT (*Short-Time Fourier Transform*) – Dennis Gabor (1946)



Fonte: MathWorks, 2023.

O problema é que uma vez definido o tamanho para a janela, esta permanece constante para todas as frequências. Pode acontecer que alguns sinais precisem de um enfoque mais flexível, onde o tamanho da janela possa mudar com o objetivo de detectar o conteúdo local da frequência [DAUBECHIES, I. (1990); GOMEZ, J. et al. (1997)].

Outro problema a ser resolvido é devido as séries trigonométricas possuírem energia infinita, sendo elas limitadas entre menos infinito ($-\infty$) e mais infinito ($+\infty$). Lembrando que as Séries de Fourier são baseadas em seno e cosseno.

Assim, sendo a janela de tamanho invariante cai no seguinte dilema: Como definir o tamanho da janela? Se a janela escolhida for pequena, haverá pouca informação sobre o sinal e muito processamento. Caso a janela seja grande, a consequência é que aumentará o erro na consideração do sinal ser estacionário.

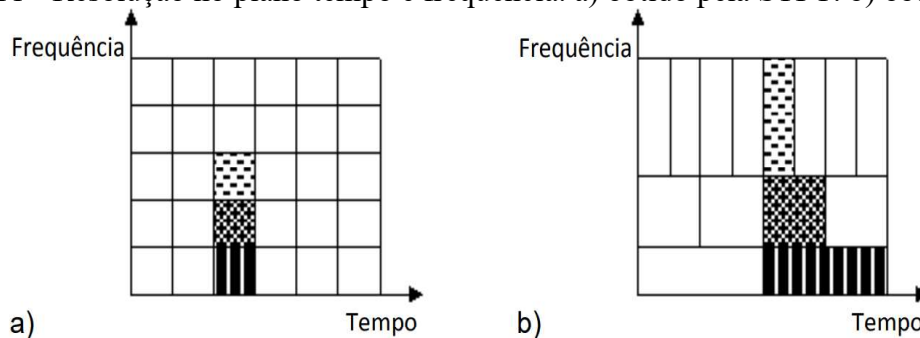
Para contornar o problema de escolha da largura da janela, foi introduzida a Transformada *wavelet*. Como poderá ser observado na próxima seção, a Transformada *Wavelet* utiliza janela sem corte abrupto, sendo semelhante a gaussiana, porém, o diferencial é que ao contrário desta, permitem uma fácil reconstrução do sinal a partir dos coeficientes da transformada. Além disso, as *Wavelets* utilizam janelas de largura variável, que podem assim ser mais bem ajustadas às características de cada trecho do sinal (GALVÃO, 2001).

Em 1981, Morlet e Grossman desenvolveram uma função matemática que possuía energia finita, ou seja, ela possuía um início e um fim, além disso ela poderia dilatar e comprimir o sinal, eliminando o problema de janela temporal fixa que fora encontrada na *STFT*, essa função matemática ficou conhecida como *Wavelets* (SILVA, Aldo. 2014).

3.2 Introdução às Transformadas *wavelets* e um Breve Histórico

A Transformada *wavelet* (TW) foi desenvolvida como uma alternativa à *STFT* para solucionar o problema da resolução. A análise via *wavelets* é feita similarmente à análise com *STFT*, no que diz respeito à multiplicação do sinal por uma função (que neste caso será a *wavelet* e não mais a janela $j(t)$, como na *STFT*). A transformada é calculada separadamente por segmentos diferentes do sinal no domínio do tempo (OLIVEIRA, 2007). A Figura 11 ilustra bem esse caso, com pode-se perceber na parte a) temos uma aplicação da *STFT*, observa-se que não há alteração no tamanho da janela quando analisada. Já na parte b), nota-se que aplicando a TW tem-se a liberdade de fazer o ajuste da janela para a melhor análise possível.

Figura 11 - Resolução no plano tempo e frequência. a) obtido pela *STFT*. b) obtido pela TW.



Fonte: BARBOSA et al, 2008.

Embora desde o começo do século a literatura registre tratamentos matemáticos semelhantes à Transformada *Wavelet* (Alfred Haar, 1910, apud Daubechies e Meyer), foi no final da década de 70 que está passou a ter uma identidade própria. Nessa ocasião, o francês Jean Morlet, imagem ilustrada na Figura 12, trabalhando para a companhia de petróleo *Elf Aquitaine*, propôs uma modificação na Transformada de Fourier, para melhor tratar sinais geofísicos (GALVÃO, 2001).

Figura 12 - Jean Morlet (1931-2007)



Fonte: LA JAUNE ET LA ROUGE, 2008.

Por falta de aprofundamento na Matemática, Morlet inicialmente encontrou muitos opositores. Esses, como lembra Daubechies, teciam críticas do seguinte tipo: “Se isso estivesse correto, já estaria nos livros de matemática. Como não está, provavelmente é inútil”. No entanto, alguns anos depois, as “*wavelets*” de Morlet atraíram a atenção de Yves Meyer, um matemático que ajudou a enriquecer e amadurecer a nova teoria, encontrando paralelos surpreendentes com diversos outros campos da matemática, antes estudados separadamente. Logo em seguida, Stéphane Mallat, um estudante de processamento de imagens, desenvolveu um algoritmo para calcular a transformada *wavelet* de forma computacionalmente eficiente, abrindo então as portas à comunidade de processamento de sinais. Como se vê, desde seu início, a teoria de *wavelets* se mostrou interdisciplinar, o que em parte explica grande popularidade adquirida nos últimos anos (GALVÃO, 2001).

O método de processamento de imagens e sinais que mais tem atraído os pesquisadores é o da transformada *Wavelet* (WT, do inglês *Wavelet Transform*) (MALLAT, 1989; MALLAT,

1998; STRANG, 1993). A aplicação da transformada *wavelets* tem se destacado em vários domínios como a engenharia, a física, a matemática entre outros. Uma aplicação muito referenciada é a compressão de imagens utilizada no *Federal Bureau of Investigation* (FBI), para impressões digitais. Assim com a aplicação das *wavelets* o problema referente ao armazenamento de dados devido ao tamanho da informação foi resolvido. Cada impressão digital passou a ocupar um espaço de armazenamento menor, através de uma taxa de compressão em uma proporção de 20:1 (GRAPS, 1995).

O princípio mais geral na construção das *wavelets* é o uso de dilatações e transformações. As *wavelets* mais usadas formam um sistema ortogonal de funções com suportes compactos construído desta forma. Esta é a razão pela qual elas podem distinguir as características locais de um sinal em diferentes escalas e, por translações, elas cobrem toda a região na qual o sinal é estudado. Na análise de sinais não-estacionários, a propriedade de localidade das *wavelets* nos conduz às suas vantagens a transformada de Fourier (DAUBECHIES, 1992).

As *wavelets* são formas de decompor um sinal em faixas de frequência, no qual a resolução de cada faixa está relacionada com a frequência central da faixa através do fator de escala. Alternativamente, a análise de *wavelets* pode ser vista como uma decomposição do sinal em sua série de funções elementares (*wavelets*), análoga ao uso de funções trigonométricas (senos e cossenos) na TF, para representar outras funções. A diferença marcante que diferencia as TF e *wavelet* é a propriedade de localização no tempo e frequência nas *wavelets*. Que se dá através das translações e das dilatações da função da wavelet-mãe no tempo, pela variação da escala. A escala é proporcional ao inverso da frequência (ROSANI, 1999).

O uso da Transformada *wavelets* aplicada em um sinal geofísico, número de manchas solares, demonstrou ser uma ferramenta matemática e robusta para análise de sinais com características não-estacionárias. Os resultados obtidos demonstraram consistência com trabalhos de vários pesquisadores que utilizaram outras ferramentas matemáticas de análise. Além disso, a sua aplicabilidade hoje em dia tornou-se acessível devido ao grande número de subrotinas disponíveis em vários softwares, tais como Fortran, Matlab e IDL (BOLZAN, 2004).

As *wavelets* têm uma larga gama de aplicações, incluindo: radar, computação gráfica, hidrodinâmica, astronomia, predição de terremotos e maremotos, turbulência, compressão de imagens, descontaminação de sinais, tons musicais, estatística, análise de sinais médicos (eletrocardiogramas, eletroencefalogramas etc.), espalhamento em banda larga, modelagem de sistemas lineares, modelagem geométrica, análise de transitório e falhas em linhas de potência,

visualização volumétrica, não sendo esta lista de maneira nenhuma exaustiva (OLIVEIRA, 2007).

De forma geral, existem basicamente dois tipos de *wavelets*. O primeiro tipo é resultado do que se conhece como a Transformada *Wavelet* Contínua (TWC) que foi desenvolvida para tratar de sinais que estão definidos em todo o eixo real. O segundo tipo é a Transformada *Wavelet* Discreta (TWD) que trata das séries definidas em limites inteiros (geralmente $t = 0, 1, \dots, N - 1$, onde N representa o número finito de valores obtidos do sinal), já que sinais de tempo discreto são definidos apenas para certos intervalos (SILVA, 2014).

3.2.1 Tranformadas *Wavelets* Contínuas

As funções *Wavelets* são ondas pequenas que derivam de uma onda principal, estas recebem o nome de *wavelet*-mãe representada por $\Psi(t) \in L^2(R)$. Essas ondas pequenas são obtidas por meio de contrações e escalamento (dilatações) e deslocamento (translações). Operando desta forma obtém-se uma família de funções base que serão utilizadas para a descrição de outras funções que pertencem ao mesmo espaço vetorial $L^2(R)$ (OLIVEIRA, 2007).

Vejamos no exemplo a seguir a *Wavelet* de Morlet expressa pela equação 9 e ilustrada no Figura 13. Serve de *wavelet*-mãe, onde $\Psi(t)$ é a primitiva (OLIVEIRA, 2007):

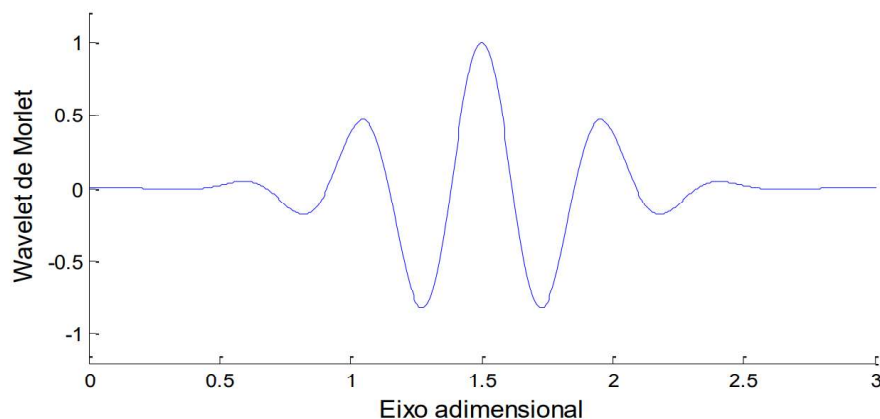
$$\Psi(t) = e^{-at^2} \cdot e^{j\omega t} \quad (9)$$

Onde,

t : tempo ou variável independente;

ω : frequência angular.

Figura 13 - *Wavelet* de Morlet



Fonte: Pereira, 2016

Os parâmetros a e b variam continuamente em $\mathbb{R}$ ($a \neq 0$) e representam as dilatações e translações, respectivamente, da função $\Psi_{a,b}$. Proporcionando a forma geral de uma família de *wavelets* descrita por:

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (10)$$

Com isso, obtém-se a *wavelet* escalada abaixo descrita:

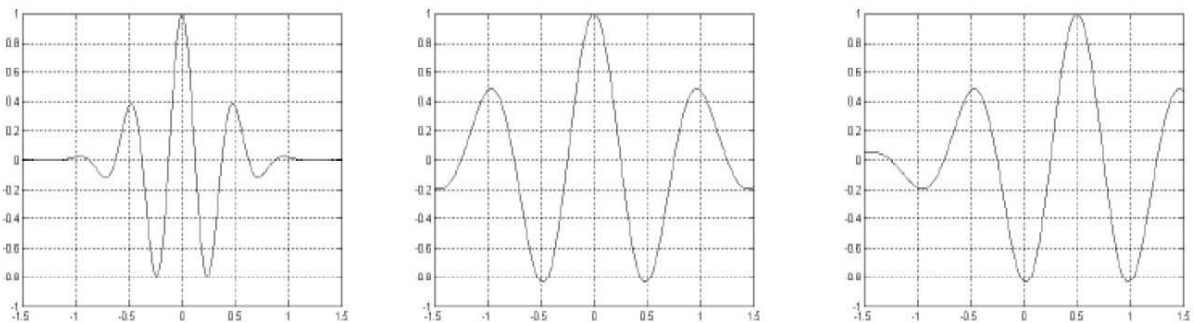
$$\Psi\left(\frac{t}{a}\right), a = 2 \quad (10.1)$$

Já no caso da *wavelet* escalada e deslocada será da seguinte forma:

$$\Psi\left(\frac{t}{a}\right), a = 2, b = \frac{1}{2} \quad (10.2)$$

A figura 14 ilustra as formas de ondas das *wavelets* descritas algebricamente acima:

Figura 14 - Formas de onda da *wavelet* de Morlet sem normalização



Fonte: OLIVEIRA, 2007.

Então se utilizam estas duas propriedades para indicar que o sinal *wavelet* pode se deslocar no domínio do tempo através da translação para indicar o instante em que uma frequência procurada é observada, bem como apresentar as características da frequência encontrada quando se atenta ao coeficiente de escalonamento (SILVA, 2014).

Segue a definição de uma transformada *wavelet* de um sinal contínuo:

$$F(a,b) = \int f(t) \Psi_{a,b}(t) dt \quad a \neq 0 \text{ e } b \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Onde $\Psi_{a,b}$ são funções que forma a base de *wavelets* e são denominadas como mencionado anteriormente de *wavelet* mãe, na qual deve satisfazer as propriedades:

$$I) \int \Psi_{a,b}(t) dt = 0 \quad (12)$$

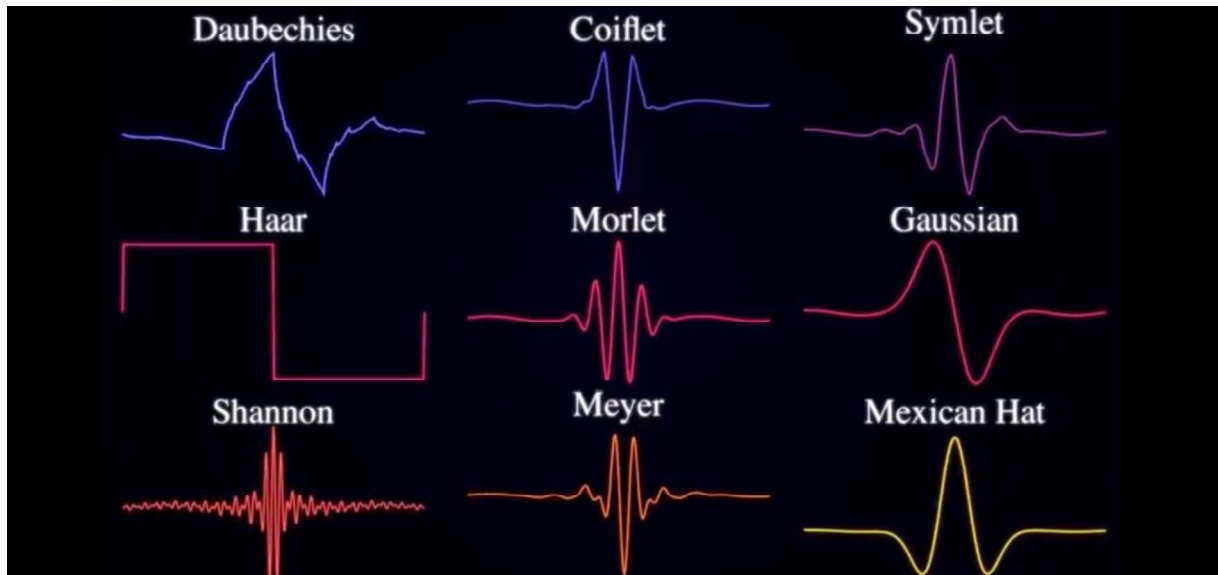
A integral da função *wavelet* deve ser zero. Garantindo assim, que esta função tenha uma forma do tipo de onda. Essa condição é conhecida como condição de admissibilidade.

$$II) \int |\Psi_{a,b}(t)|^2 dt = 1 \quad (13)$$

A propriedade *II* diz que a função *wavelet* deve ter energia unitária. Dando a garantia que a função possua suporte compacto, ou com um decaimento rápido de amplitudes, garantindo a localização temporal (BARBOSA et. al, 2008).

Há uma ampla gama de possíveis escolhas para a função $\Psi(t)$, denominada como mencionado anteriormente de *wavelet*-mãe e a sua escolha vai depender dos objetivos de cada aplicação. A figura 15 a seguir ilustra algumas dessas funções *wavelets*.

Figura 15 – *wavelets*-mães



Fonte: YouTube, 2022

Dentro da transformada *wavelet* discreta distinguem-se duas abordagens: sistemas redundantes discretos (frames) e o ortonormal (e outras) bases de *wavelets*. A segunda considera a análise de multiresoluções desenvolvida por Mallat, e sobre ela trataremos no subtópico posterior.

3.2.2 Análise de Multiresoluções

A ideia básica para a criação de uma representação do sinal em ambos os domínios, tempo e frequência, consiste em dividir o sinal em várias partes e analisar de forma individualizada cada uma dessas partes. Um problema fundamental é a descoberta de como dividir o sinal em frações menores, sem alterar as particularidades destes. Há uma diversidade de formas para a realização dessa análise em sinais, uma delas é a transformada Wavelet.

A análise multiresolução é uma técnica de processamento digital de sinais que possibilita a obtenção de informações sobre o comportamento do sinal estudado em função da variação de mais de uma variável.

Uma forma eficiente de aplicar esta transformada é através de filtros, técnica desenvolvida por Mallat em 1989, onde se tem a decomposição da *wavelet* implementando a análise multiresolução. A análise multiresolução é uma técnica que permite analisar sinais em múltiplas bandas de frequências (MALLAT, 1989).

Quando Mallat trabalhou com *wavelets* de Meyer pela primeira vez, ele estava trabalhando com análise de imagens, onde a ideia de se estudar imagens em várias escalas simultaneamente era popular. Isso o estimulou a ver as bases ortonormais de *wavelets* como uma ferramenta para descrever matematicamente o “incremento da informação” necessária para ir de uma aproximação grosseira para uma outra com maior resolução (DAUBECHIES, I. 1990)

3.2.3 Transformadas *wavelets* discretas

A TW em sua forma contínua (TWC) é útil essencialmente para estudos teóricos, deduções e verificações de suas propriedades. Para aplicações práticas a discretização da TW é mais eficiente e permite a sua implementação computacional.

A concepção da transformada *wavelet* discreta (TWD) vem da necessidade de utilizar a transformada *wavelet* contínua em aplicações práticas e levar a técnica ao processamento de sinais e aplicações computacionais. Isso principiou uma grande variedade de estudos para a transformada *wavelet* e foi de extrema importância para o grande interesse a respeito dessa ferramenta. A discretização da transformada *wavelet* ocorre nos domínios dos parâmetros de escala e translação, não ocorrendo mudanças na variável independente como tempo ou espaço que são as mais observadas (SILVA, 2014).

Na transformada *wavelet* discreta ocorre uma representação de qualquer sinal no domínio $L^2(R)$ por uma série de equações utilizando uma função de expansão generalizada $f(t)$. Novamente, pode-se realizar a análise considerando uma *wavelet* mãe $\psi(t)$ a partir de

uma função discreta $f(n)$ definida no espaço $L^2(R)$ obtendo a expressão (11) a transformada *wavelet* discreta. Sendo a *wavelet* mãe correspondente e, aqui os parâmetros de translação e escala são funções dos valores inteiros m e n na forma $a = a_0$ e $b = nb_0a_0^m$ que ajudam a caracterizar a discretização da transformada (BURRUS et.al., 1998).

$$f(n) = \sum_{j,k} a_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j n - k) \quad (14)$$

$$TWD(m, n) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \sum f(n) \psi\left(\frac{x - nb_0a_0^m}{a_0^m}\right) \quad (15)$$

Na Transformada Wavelet Discreta (TWD) os parâmetros de dilatação e translação não variam continuamente, como no caso da transformada contínua, mas sim discretamente. Em certas aplicações, incluindo aquelas em análise de sinais, podem-se restringir os valores dos parâmetros a e b a uma grade discreta, fixando um passo de dilatação a_0 e um passo de translação b_0 . A equação (12) mostra a forma discreta da transformada em comparação com a forma contínua, primeiramente discretizando apenas os parâmetros de escala e translação (a e b) e depois discretizando também a variável independente (tempo) (DAUBECHIES, 1992).

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \Rightarrow \psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t - nb_0a_0^m}{a_0^m}\right) \quad (16)$$

Onde:

m e n são inteiros;

$a_0 > 1$: parâmetros de escala ou dilatação fixo;

b_0 : parâmetro de tempo ou translação fixo;

t : variável independente contínua;

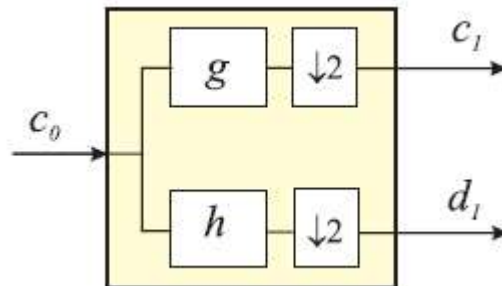
Assim, a TWD é um método de decomposição tempo-frequência, nos quais o sinal discreto é sucessivamente dividido em coeficientes escala e *wavelet* com diferentes conteúdos de frequência por meio de filtros passa-baixa (filtro escala – g) e passa-alta (filtro *wavelet* - h), como pode ser observado na Figura 16, respectivamente (MEDEIROS, 2017).

A transformada wavelet pode ser interpretada como uma filtragem seguida de um *downsampling* ou diminuição na taxa de amostragem, assim considerando um coeficiente $a_{j,k}$

em um nível j então $a_{j,k}$ terá metade do número de coeficientes de $a_{j-1,k}$ no nível $j - 1$, acontecendo o mesmo para $d_{j,k}$ de tal forma que o sinal final decomposto tem a mesma quantidade de dados do sinal inicial original. O processo é o mesmo para todos os níveis da transformada e segue até o nível necessário para a análise do sinal em estudo. Seguindo primeiramente o processo de decomposição do sinal, os filtros G e H são definidos como $G = [g(k)]$ e $H = [h(k)]$ e são importantes para a representação do sinal que os relacionam. Na Figura 8 onde a amostra de entrada é removida na proporção com *downsampling* de 2, representado pelo símbolo $\downarrow 2$ para manter constante o formato do sinal original (SILVA, 2014).

Na Figura 16 pode ser observado a ilustração de uma decomposição de um sinal arbitrário c_0 nos coeficientes escala e *wavelet* da Transformada *Wavelet* Discreta Redundante (TWDR), no qual a saída do filtro g corresponde ao coeficiente c_1 que fornece informações de baixa frequência do sinal, enquanto que a saída do filtro h corresponde ao coeficiente *wavelet* d_1 que fornece o conteúdo de alta frequência do sinal. Isso pode ser feito para vários níveis de decomposição, mas nesta pesquisa nos restringimos apenas ao primeiro nível de decomposição, nos demais níveis de decomposição, os coeficientes escala podem ser entradas para o subsequente banco de filtros escala e *wavelet* (MEDEIROS, 2017).

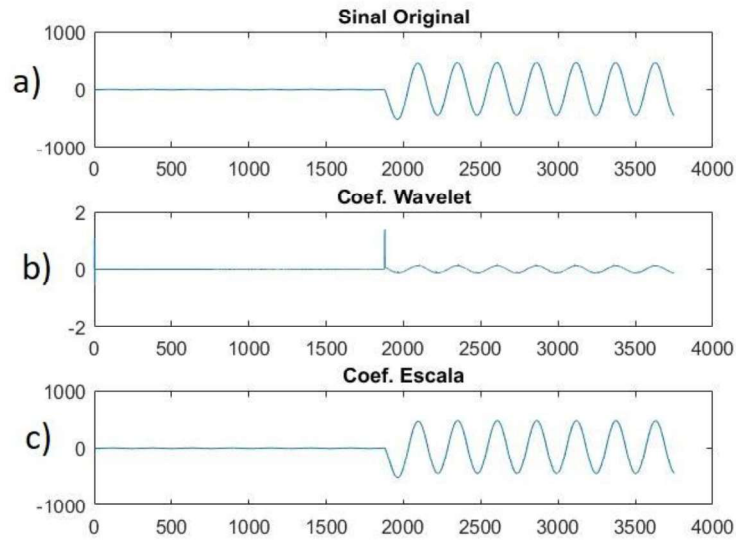
Figura 16 - diagrama de bloco ilustrando a decomposição do primeiro nível da TWDR



Fonte: Próprio autor.

O Figura 17 ilustra o cálculo dos coeficientes escala e *wavelet* para o nível $j = 1$ de resolução. Pode-se observar na parte 17 a) tem-se o sinal a ser analisado e logo abaixo nas partes 17 b) e 17 c) pode-se observar a decomposição dos coeficientes através dos filtros mencionados acima.

Figura 17 - Cálculo dos coeficientes escala e *wavelets* de um sinal



Fonte: Próprio autor.

Os coeficientes escala c_j e os coeficientes *wavelet* d_j da TWD, no nível de resolução j , são obtidos pela convolução entre coeficientes c_{j-1} , do nível de resolução $j - 1$, com os filtros g e h , respectivamente:

$$c_j[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n - 2k)c_{j-1}(n) \quad (17)$$

$$d_j[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n - 2k)c_{j-1}(n) \quad (18)$$

Em que c_0 é igual ao sinal original, $j \geq 1$ e g e h são filtros passa-baixa e passa-alta, respectivamente (MEDEIROS, 2017).

4 APLICAÇÕES DAS TRANSFORMADAS DE FOURIER E *WAVELET*

A presente pesquisa teve em seu procedimento metodológico uma revisão bibliográfica onde se expõe algumas maneiras de abordagens das transformadas de Fourier e *wavelet* fazendo uma breve histórico, descobertas e suas aplicações que são tão importantes na análise de sinais. O estudo fora feito por meio de diversos livros, dissertações, teses e entre outras publicações científicas de modo que de modo que o presente trabalho adquirisse embasamento teórico. A fim de ilustrar os comportamentos das transformadas de Fourier e *wavelet* foram desenvolvidas simulações de eventos que geram sinais não-estacionários no software MATLAB.

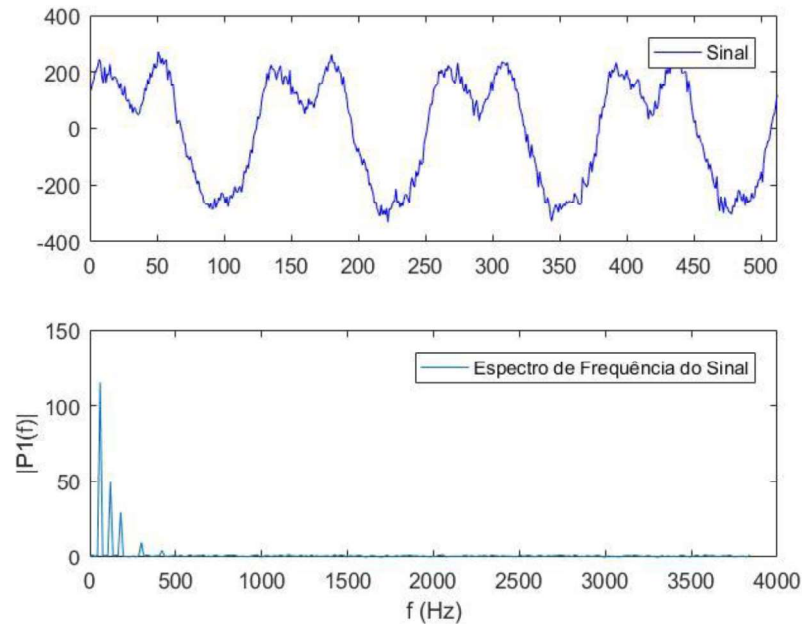
Até o momento tratamos dos fundamentos das transformadas de nosso objeto de estudo, nesta seção para que nossos objetivos sejam atingidos vamos tratar das aplicações das Transformadas de Fourier e *wavelets*, com o auxílio do *software MATLAB*. Fazendo uma comparação levando em consideração as vantagens da *wavelet* sobre a Transformada de Fourier.

Será analisado o mesmo sinal com ruído através das duas Transformadas. Assim, inicialmente mostraremos como fica a análise deste sinal aplicando a Transformada de Fourier e em seguida é utilizado a análise a partir da Transformada *wavelet*.

O sinal x é comum nas análises a seguir, este é uma soma de senoides com amplitudes e frequências diferentes de cada uma e foi adicionado um ruído, cuja relação sinal-ruído é 20 dB. Esse ruído pode representar vários problemas, tais como: transitórios, interferências, entre outros. A análise é feita primeiramente com a Transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform - FFT) e depois com a *wavelet*.

No Figura 18, o sinal (x) foi analisado com frequência fundamental $f = 60 \text{ Hz}$, frequência angular $\omega = 376,9911 \text{ rad/s}$ e foi amostrado à uma faixa $f_s = 7680 \text{ Hz}$, sendo assim, o número de amostra por ciclo N é dado por $N = \frac{F_s}{f}$, logo, esta amostra possui $N = 128$.

Figura 18 - Sinal analisado com a Transformada de Fourier



Fonte: Próprio autor

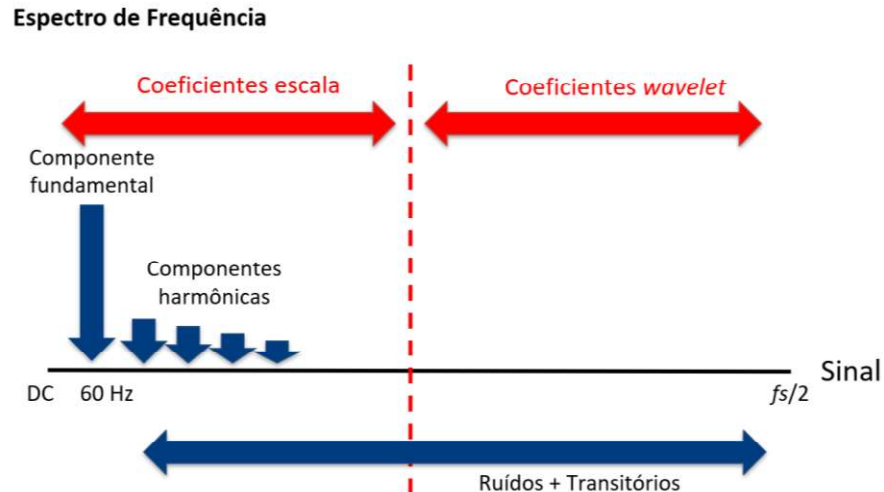
Vejamos que o gráfico da aplicação da TF (espectro de frequências), o ruído aparece dissolvido em várias componentes de frequências, com amplitudes ínfimas. Como já descrito na fundamentação teórica, a FFT analisa o sinal e apresenta seus resultados no domínio da frequência, isso não teria problema em casos de sinais estacionários (o sinal se repete em curto intervalo de tempo), porém, para sinais não-estacionários (não repetição do sinal) a FFT não é eficiente, devido à falta de informação espacial.

Agora, na Figura 20 por sua vez é ilustrado o cálculo dos coeficientes escala e *wavelets* do mesmo sinal do gráfico anterior. O cálculo foi realizado usando a $db(4)$, em que $db(L)$ corresponde à *wavelet*-mãe da família *Daubechies* com L coeficientes e o nível de resolução escolhido foi para $j = 1$. O sinal foi analisado com a frequência fundamental $f = 60 \text{ Hz}$ e foi amostrado dessa vez à uma faixa $f_s = 15360$, assim, o número de amostras em um ciclo de 60 Hz , denominado por dk , é obtido pela expressão $dk = \frac{f_s}{f}$, portanto, $dk = \frac{15360}{60} = 256$.

A ilustração da figura 19 representa a forma que é realizado a análise aplicando a Transformada *wavelet* para o cálculo dos coeficientes escala e *wavelet*, ou seja, é analisado com a metade da frequência de amostragem, sendo $\frac{f_s}{2} = 7680 \text{ Hz}$. Com isso, de 0 a 7680 Hz é a banda dos coeficientes escala, onde representam o sinal original com suas componentes de frequência mais baixas, tais como: as senoides de 60 Hz e as demais (fundamental + aquelas das outras senoides), sendo frequências baixas em relação ao ruído. E de 7680 a 15360 Hz é a

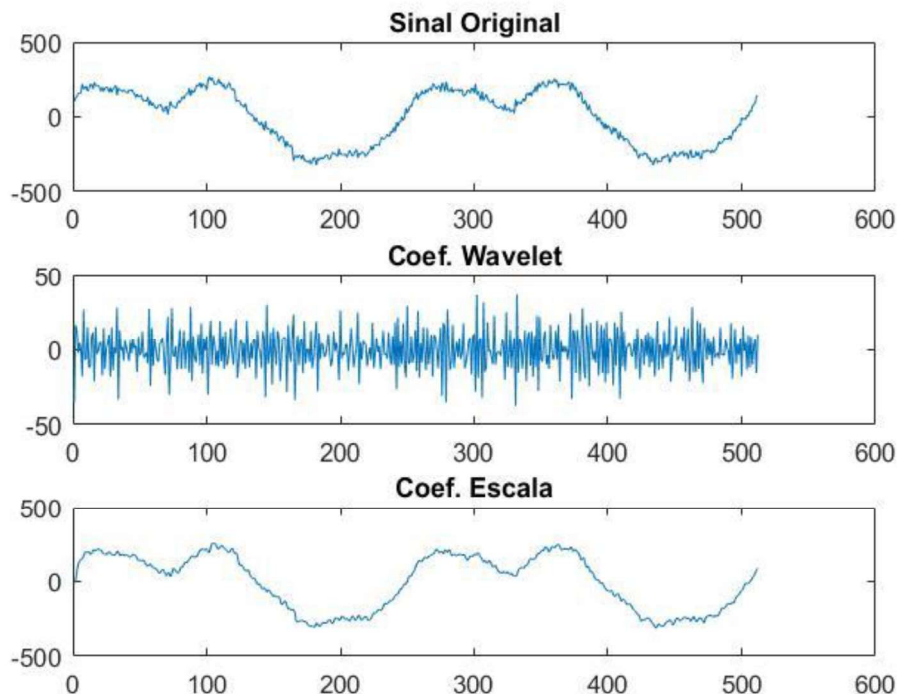
banda dos coeficientes *wavelets* que pega as frequências mais altas do sinal, como mencionado anteriormente o ruído está dissolvido em várias frequências, desde as mais baixas até as mais altas sendo evidenciado na banda dos coeficientes *wavelets*.

Figura 19 - ilustração das bandas de frequências dos coeficientes escala e *wavelet*



Fonte: Próprio autor

Figura 20 - Cálculo dos coeficientes *wavelets* e escala



Fonte: Próprio autor

Com a análise do sinal (x) utilizando a Transformada *Wevelet* Discreta, é originada a decomposição do sinal utilizando os filtros g (passa-baixa) e h (passa-alta) mencionados na

seção anterior. Assim, será retornado a informação do sinal com parâmetros de escalonamento e translação, obtendo assim, os coeficientes escala e *wavelet* do sinal original. Nesta pesquisa foi desenvolvido a decomposição apenas para o nível $j = 1$, mas poderia ser feita para níveis mais elevados. Essa avaliação em diferentes níveis de detalhes é denominada análise multiresolução (Mallat, 1989).

Portanto, é notório que para a análise de sinais não estacionários as transformadas *wavelets* se sobressaem às Transformadas de Fourier, pois, as *wavelets* permitem analisar um sinal obtendo informações de tempo e frequência e a análise de Fourier só é possível tratar as informações no domínio da frequência.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente pesquisa foram estudadas as Transformadas de Fourier e *Wavelet*, fazendo um breve passeio pela história partindo das origens das séries de Fourier à implementação da Transformada que carrega o seu nome. Depois em se tratando de suas aplicações pode-se perceber o quanto esta Transformada tem avançado significativamente no campo das ciências exatas, com elevada contribuição nas análises de sinais. Daí, a história continua, ao perceber sua ineficiência para sinais não estacionários, o renomado pesquisador Dennis Gabor faz uma pequena adaptação na TF, incrementando uma função janela, assim, denominada de Transformada Janelada de Fourier (ou de Gabor). Pensa-se que com isso seria resolvido o problema, mas foram aparecendo outros e um deles é que a função janela idealizada por Gabor era invariante, ou seja, uma vez escolhido o tamanho da janela, não seria possível alterá-la, o que ocasionaria perdas nas análises dos sinais. Com isso, para a resolução do problema, o físico Jean Morlet, desenvolveu novos avanços quanto as janelas, assim foi desenvolvida a Transformada *wavelet*, que tem suas bases em funções denominadas *waveletes*-mães, nas quais, possuem duas poderosas propriedades que são as de escalonamento e translação, fazendo com que a nova transformada agora possa retornar valores tanto no domínio do tempo quanto no da frequência independente se os sinais são estacionários ou não. Depois de todo esse contexto histórico e de embasamento teórico, para que os objetivos fossem definitivamente alcançados, foram realizadas simulações aplicando as duas transformadas, utilizando o *software MATLAB*, em que foi possível observar às vantagens das TW sobre às TF quando se trata de análises de sinais não estacionários.

Assim, através deste trabalho podem ser estudadas e mais difundidas as aplicações das Transformadas *Wavelets* em análises de sinais. Evoluindo, com isso, para uma solução mais viável em problemas relacionados à engenharia elétrica, tais como: transitórios, curtos-circuitos, armazenamento de dados, entre outros.

Portanto, para trabalhos futuros nesta área, recomenda-se que o pesquisador estude bem sobre às Transformadas, desde as de Fourier até chegar nas *wavelets*, pois, não é trivial desenvolver trabalhos nesta temática. Um bom embasamento teórico sobre as análises trará um ganho e fará com que o estudante avance mais rápido no desenvolvimento de sua pesquisa. Por fim, é de fundamental importância ter noções de programação para que seja feita a implementação de códigos voltados às Transformadas revisadas nesta pesquisa, de forma computacional, à exemplo do que feito aqui com o *software MATLAB*.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew NO. **Fundamentos de circuitos elétricos**. AMGH Editora, 2013.
- BARBOSA, Augusto CB; BLITZKOW, D. **Ondaletas: Histórico e aplicação**. São Paulo, p. 38, 2008.
- BELÉNDEZ, Augusto et al. “¿ Dónde está el tren?”: Una aproximación a los orígenes de la holografía. 2007. Disponível em: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/9158/1/OPA_v40_n3_p281_2007.pdf . Acessado em: 06 Out 2023.
- BIANCHI, F. M. (2006). **Extração de características de imagens de faces humanas através de Wavelets, PCA e IMPCA**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- BOLZAN, M. J. A. **Análise da transformada em ondaletas aplicada em sinal geofísico, 2004**. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/7qDXRJBfhQdXx8PxNnbzDvs/?format=pdf&lang=pt> , Acessado em: 05 Dez. 2022.
- BURRUS, C. S.; RAMESH, A. G.; GUO, H. **Introduction to wavelets and wavelet transforms: a primer**. Upper Sadle River: Prentice Hall, 1998. 268 p.
- DA PENHA, ROSANI ML. **Análise de Sinais em regime transiente aplicando a técnica de wavelet**. 1999.
- DAUBECHIES, I. (1990) **The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis**. IEEE Transactions on Information Theory, 36, 961-1001.
- DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. CBMS-NSF Regional Conference Series on Applied Mathematics, Philadelphia, SIAM, 1992.. Disponível em: <https://jqichina.files.wordpress.com/2012/02/ten-lectures-of-waveletsefbcb88e5b08fe6b3a2e58d81e8aeb2efbc891.pdf> . Acessado em: 02 Dez. 2022.
- EDUARDO, Eligio Carlos et al. **Aplicações da Transformada de Fourier em soluções numéricas de sistemas periódicos em mecânica**. 2018. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Pos-Graduacao44/programasdepos/eduardo_ec_me_rcla.pdf . Acessado em: 03 Out 2023.
- From Fourier Analysis to Wavelet Analysis. MathWorks. 2023. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/wavelet/gs/from-fourier-analysis-to-wavelet-analysis.html>. Acessado em: 06 Out. 2023.
- GALVÃO, Roberto Kawakami Harrop et al. **Estudo comparativo sobre filtragem de sinais instrumentais usando transformadas de Fourier e Wavelet**. Química Nova, v. 24, p. 874-884, 2001. <https://www.scielo.br/j/qn/a/pcJxyRmgfjMm6ZmwKtHMjCx/?format=pdf&lang=pt>

GONZALEZ, R. & WOODS, R. **Digital image processing**. EUA: Prentice Hall, 1992. Disponível em: http://sdeuoc.ac.in/sites/default/files/sde_videos/Digital%20Image%20Processing%203rd%20ed.%20-%20R.%20Gonzalez%2C%20R.%20Woods-ilovepdf-compressed.pdf. Acesso em: 10 Fev. 2023

GRAPS, A. **An introduction to wavelets**. IEEE Computational science & engineering, 1995. 2(2), 50-61. Disponível em: <https://user.engineering.uiowa.edu/~aip/papers/graps1995.pdf>. Acessado em: 09 Fev. 2023

KIRSANOV, Artem. **Wavelets: a mathematical microscope**. YouTube, 15/08/2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=jnxqHcObNK4>

MALLAT, Stephane G. **Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$** . Transactions of the American mathematical society, v. 315, n. 1, p. 69-87, 1989.

MEDEIROS, Rodrigo Prado de. **Proteção diferencial de transformadores de potência utilizando a transformada Wavelet com efeitos de borda**. 2017. 128f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica e de Computação) - Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/25064/1/RodrigoPradoDeMedeiros_TESE.pdf. Acessado em: 04/10/2023.

MEYER, Par Yves. **Hommage à Jean Morlet (52), inventeur de la théorie des ondelettes**. LA JAUNE ET LA ROUGE. 03/2018. Disponível em: <https://www.lajauneetlarouge.com/wp-content/uploads/2011/10/633-page-050-052.pdf>

OLIVEIRA, H. M. **Análise de Fourier e Wavelets: Sinais Estacionários e Não estacionários**. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Helio-De-Oliveira/publication/299503954_Analise_de_Fourier_e_Wavelets_Sinais_Estacionarios_e_na_o_Estacionarios/links/5f2b46f2458515b729069009/Analise-de-Fourier-e-Wavelets-Sinais-Estacionarios-e-nao-Estacionarios.pdf. Acessado em: 11 Fev. 2023

PEREIRA, Sidnei et al. **Transformada wavelet aplicada a análise automática de oscilografias de curta duração em unidades geradoras**. 2016. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/1759/1/PB_PPGEE_M_Pereira%2c%20Sidnei_2016.pdf. Acessado em: 04 Out 2023

SILVA, Aldo Ventura da **TRANSFORMADA WAVELETS – ABORDAGEM DE SUA APLICABILIDADE**. Revista Científica Semana Acadêmica. Fortaleza, ano MMXIV, N°. 000059, 02/09/2014. Disponível em: <https://semanaacademica.org.br/artigo/transformada-wavelets-abordagem-de-sua-aplicabilidade>. Acessado em: 03 Dez. 2022.

SILVA, Paulo Henrique Gonçalves Leonel da. **Proteção Diferencial de Transformadores Usando a Transformada Wavelet**. 2014. 73 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2014. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/items/222c9f2a-322c-46b8-aa09-d40abc4fcc6f>. Acessado em: 04/10/2023.