

O USO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM NA ANÁLISE DA FLAMBAGEM DE COLUNAS

Anderson Geovany de Lucena Silva¹, Antonio Ronaldo Gomes Garcia², Filipe Lima dos santos³

Resumo: Na engenharia civil, existe várias aplicações de equações diferenciais de segunda ordem, uma delas é utilizada na modelagem do estudo de flambagem de colunas para encontrar o valor da carga crítica através do estudo da linha elástica que descreve o comportamento da coluna fletida. Com base na relevância deste estudo e na carência de trabalhos que mostrem diretamente a ligação das aplicações das equações diferenciais com a engenharia, este busca mostrar de forma clara e objetiva apresentando a modelagem para carga crítica de colunas com diferentes condições de apoio baseado nos estudos de Euler, além de fazer um comparativo dos valores experimentais obtidos em laboratório para dois comprimentos de barras diferentes, com o resultado teórico obtido em cada caso pelas equações estudadas, onde tal comparação diante das condições laboratoriais existentes só foi possível de ser feita para dois dos quatro casos estudados. Os resultados obtidos foram satisfatórios, dentro dos casos possíveis de análise, uma vez que, os eventos obtidos experimentalmente para carga crítica das barras de aço nestes casos, em que foi realizado o ensaio, variou relativamente pouco em relação ao valor teórico obtido pelas equações.

Palavras-chave: Equações diferenciais; Aplicação; Flambagem; Carga Crítica

1. INTRODUÇÃO

Um dos fenômenos importantes a serem analisados na engenharia civil é a flambagem em colunas que pode acarretar diferentes problemas estruturais, devido à perda de instabilidade desses elementos responsáveis por distribuir as cargas para as fundações das edificações. De acordo com [1], existe uma carga máxima que a coluna suporta antes de flambar chamada de **carga crítica** ou **carga de Euler**, que pode ser calculada para diferentes tipos de colunas submetidas a diferentes condições de apoios. Neste trabalho, pretende-se estudar a equação da carga crítica para colunas utilizando equações diferenciais para a modelagem das expressões aplicando os conceitos de acordo com [2] e analisando os quatro casos diferentes de apoio, a saber:

Caso 1: A coluna está **apoiada em ambas as extremidades** por pinos;

Caso 2: A coluna está **engastada em uma das extremidades** e na outra está **livre**;

Caso 3: A coluna está **engastada em uma das extremidades** e a outra **presa** por pinos;

Caso 4: a coluna está **engastada em ambas as extremidades**.

Tendo em vista que em cada caso haverá uma modelagem diferente, o tema abordado pode ajudar alunos que possuem dificuldades de associar os conhecimentos de equações diferenciais às engenharias, em particular, a engenharia civil, que é o nosso ambiente de formação. Uma análise comparativa para os valores de carga crítica, efetuando-se o cálculo de acordo com as expressões matemáticas e com valores experimentais obtidos, através de simulação em laboratório, para dois comprimentos diferentes de coluna, onde o ensaio foi feito com barras de aço. Diante das limitações laboratoriais locais só foi possível realizar a simulação e experimento para os casos 1 e 3 citados anteriormente, que do ponto de vista da proposta é de grande valia.

2. ESTADO DA ARTE

2.1. Referencial teórico

2.1.1. Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

Uma equação diferencial (ED) é aquela que possui derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes. Uma ED do tipo ordinária é aquela que possui derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável livre, podendo ser chamada de equação diferencial ordinária (EDO). Um outro critério de classificação é quanto a sua ordem, onde determina-se a mesma de acordo com a ordem da maior derivada da equação, portanto uma ED de segunda ordem é aquela que a maior derivada é de segunda ordem [2].

A solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem é dada por uma função $y(x)$, no entanto para escolher o método de resolução precisa-se saber das restrições do método e se ela é homogênea ou não homogênea, as equações (1) e (2) abaixo representam-nas respectivamente.

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0; \quad (1)$$

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = g(x), \quad (2)$$

onde a , b e c são constantes reais, no entanto o que vai diferenciar cada um destes tipos de ED é o valor de $g(x)$. Para escrever tanto a equação (1) como a (2) na forma padrão é necessário dividir todos os membros da equação pelo coeficiente a .

Para resolver uma ED homogêneas utilizamos o método dos coeficientes constantes que consiste em representar uma equação diferencial por uma equação auxiliar neste caso de segunda ordem, onde a mesma pode ser resolvida simplesmente encontrando as raízes que solucionam o seguinte polinômio:

$$am^2 + bm + c = 0, \quad (3)$$

onde o grau de m em cada termo representa a ordem da derivada.

As equações estudadas neste trabalho possuem raízes complexas $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$ que segundo [1], a solução para este caso é dada da seguinte forma:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x), \quad (4)$$

onde α corresponde a parte real da solução da equação auxiliar e β a parte complexa.

Para o caso das não homogêneas a solução será desenvolvida em duas partes onde a solução geral será:

$$y = y_c + y_p, \quad (5)$$

onde y_c é a solução complementar referente a equação homogênea associada e y_p é uma solução particular que nos casos analisados posteriormente, quando necessária será obtida através do método da superposição coeficientes a determinar. Este método consiste em representar a função $g(x)$, por uma função equivalente de forma genérica com constantes arbitrárias, feito isto calcula-se as derivadas até a segunda ordem desta função genérica e as substituem na equação diferencial, por fim iguala-se os termos semelhantes e encontra o valor das constantes e consequentemente encontra-se y_p .

Com os resultados obtidos até aqui pode-se escrever a solução da ED em função de x e constantes desconhecidas c_1 e c_2 mostradas na Equação (4). Para determina-las precisa-se da existência de um problema de valor inicial (PVI) ou um problema valor de contorno (PVC), onde este último será utilizado mais adiante na análise das condições de contorno referente a cada caso de estudo. Uma condição de contorno consiste em uma aplicação de um valor x_0 conhecido onde conhecemos o valor de y , ou seja, $y(x_0) = y_0$ onde esta condição pode ser utilizada tanto para solução y quanto para sua derivada $\frac{dy}{dx}$.

2.1.2. Flambagem em colunas

Um dos fenômenos importantes a serem estudados na engenharia civil é flambagem em colunas, quando evidencia a ocorrência em uma estrutura pode-se dizer que supostamente a mesma não foi projetada de forma correta. De acordo com [1], uma coluna é um elemento estrutural comprido e esbelto que pode estar sob carga de compressão axial, e esta pode provocar uma deflexão lateral na coluna onde tal deflexão é denominada flambagem.

Para que este fenômeno não aconteça é preciso que a coluna seja projetada com eficiência, de maneira que a mesma suporte a carga solicitada sem falhar, para isto é necessário o conhecimento do valor máximo da carga axial que a coluna suporta sem flambar, ou seja, quando este elemento estrutural está na eminência de acontecer a flambagem, esta carga máxima é denominada crítica P_{cr} ou carga de Euler por ter sido o primeiro a desenvolver estudos significantes sobre ela (Figura 1a). Após este estado, qualquer carga extra provocará a flambagem na coluna (Figura 1b). Quando está sob ação da coluna uma carga $P < P_{cr}$ a mesma encontra-se em equilíbrio estável e não haverá nenhum deslocamento em sua posição, mas se $P > P_{cr}$ o equilíbrio é instável e a coluna perderá sua forma retilínea original. Existe uma determinada situação onde $P = P_{cr}$ denominado ponto de bifurcação, para este caso o equilíbrio é neutro e a coluna encontra-se na eminência de flambar, logo isto pode acontecer se houver aumento na carga P ou qualquer perturbação lateral tornado a coluna instável, todas as situações estão representadas graficamente na Figura 2.

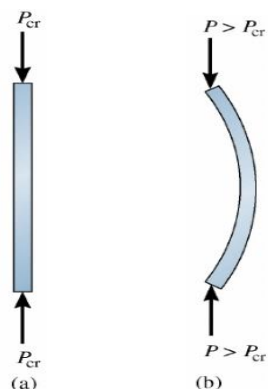


Figura 1: Coluna antes e depois da flambagem [1].

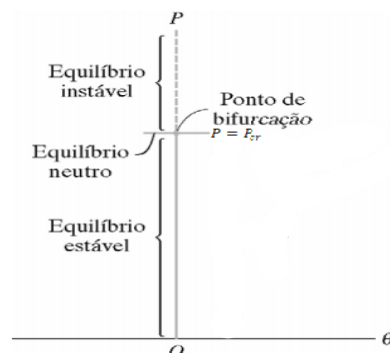


Figura 2: Estabilidade de uma coluna [1]. (Adaptado)

Segundo [3], a análise de uma coluna pode ser realizada a partir do estudo de vigas, onde uma coluna pode ser considerada como uma viga que suporta cargas axiais em vez de cargas perpendiculares. No entanto, a análise de flambagem em colunas parte do estudo de deflexão em vigas, devido as semelhanças significativas apresentadas para estes dois elementos estruturais que podem facilitar o entendimento de colunas quando existe conhecimento prévio sobre vigas, de maneira que a deflexão vertical que ocorre nas vigas é análoga a deflexão horizontal nas colunas, logo a análise destas duas situações podem ser feitas de acordo com a interpretação da linha elástica.

De [1], o diagrama da deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centroide de cada área de seção transversal da viga é conhecido como linha elástica. Uma espécie de rascunho da forma defletida da viga devido a ação de um carregamento, que pode ser identificada facilmente de acordo com a carga e as condições de apoio, como mostrado na Figura 03.

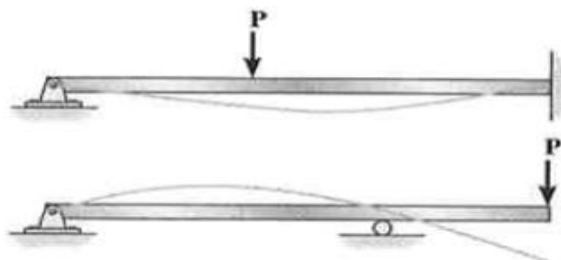


Figura 3: Identificação da linha elástica [1].

Segundo [4], que foi um dos autores a conseguir representar o comportamento da linha elástica por uma equação diferencial de segunda ordem, em função do módulo de elasticidade (E), do momento de inércia (I), e da função $M(x)$ que descreve o momento fletor, tal representação recebeu o nome de equação da linha elástica e escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (6)$$

Segundo[3], a expressão acima também representa a equação da linha elástica para colunas, porém para analisar cada caso separadamente o que irá diferenciar entre as situações será as condições de apoio na qual a coluna se encontra, de maneira que em cada situação haverá um comportamento da linha elástica diferente, tal comportamento pode permitir uma premissa de como a coluna ficará depois de flambada de acordo com a linha elástica. Para efetuar a modelagem das expressões considera-se que a coluna é ideal, que para [1], é uma coluna perfeitamente reta antes da carga, feita de um único material e a aplicação da carga é feita no centro de gravidade da área de seção transversal da coluna.

Partindo do princípio da Equação (6) é possível isolar a função $M(x)$ em um membro da igualdade, então pode-se escrever uma equação de linha elástica para diferentes situações de apoio que a coluna pode está submetida, onde $M(x)$ depende das condições de apoio, além de chegar na expressão que descreve a carga crítica resolvendo a equação diferencial da linha elástica em função de uma carga P que atua diretamente nas extremidades da coluna e que pode provocar flambagem.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (7)$$

Desta forma pode simplificar o entendimento da modelagem para cada condição de apoio, onde para iniciar a modelagem substitui-se o valor de $M(x)$ para cada caso na Equação (7), chegando na equação diferencial de segunda ordem específica para cada caso.

2.2. Casos estudados

2.2.1. Coluna apoiada por pinos em ambas as extremidades

Neste tópico será modelada uma equação diferencial de segunda ordem que represente a situação em que a coluna encontra-se biarticulada (Figura 4).

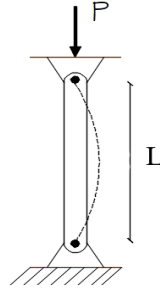


Figura 4: Coluna biarticulada. (Autoria própria)

Segundo [2], a equação do momento fletor para uma coluna situação é descrito pela seguinte expressão:

$$M(x) = -Py \quad (8)$$

Substituindo na Equação (7), temos a equação da linha elástica que é mostrada em azul na Figura 4 expressa da seguinte forma:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py. \quad (9)$$

Para obter esta equação diferencial na forma padrão, dividimos ambos os membros por EI e deixamos em um membro da equação tudo que for dependente de y , assim a equação na forma padrão para este caso será:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = 0. \quad (10)$$

A Equação (10) e da forma de (1), ou seja, do tipo homogênea onde sua solução é mais simples de obter utilizando a Equação auxiliar (3), a expressão é dada por:

$$m^2 + \frac{P}{EI} = 0. \quad (11)$$

Resolvendo esta equação do segundo grau obtemos a seguinte solução para a mesma:

$$m = \pm \sqrt{\frac{P}{EI}} i. \quad (12)$$

De (12), temos que $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{\frac{P}{EI}}$. Substituindo estes valores em (4) obtém-se a seguinte solução:

$$y = c_1 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + c_2 \sen \sqrt{\frac{P}{EI}} x, \quad (13)$$

onde c_1 e c_2 são constantes que podem ser determinadas pelas condições de contorno nas colunas. Sabemos que nos pontos onde a extremidade está fixa não há deslocamento. Logo, as condições de contorno são $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$.

Aplicando a primeira condição na Equação (13), temos que:

$$y(0) = c_1 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} 0 + c_2 \sen \sqrt{\frac{P}{EI}} 0 = 0, \quad (14)$$

como $\sen(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$, então temos que $c_1 = 0$. Aplicando a segunda condição analogamente a primeira, obtém-se a seguinte expressão:

$$0 = c_2 \sen \sqrt{\frac{P}{EI}} L, \quad (15)$$

para que esta Equação seja satisfeita, necessariamente $c_2 = 0$ ou $\text{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0$. Para $c_2 = 0$ seria a solução trivial a qual não nos interessa, porque para este caso a coluna sempre permaneceria reta, ou seja, não iria ocorrer flambagem independente da carga P que estivesse sendo aplicada, coisa que acontece diferente em um caso real quando aumenta-se a carga P a coluna tende a perder sua instabilidade, portanto esta possibilidade pode ser descartada. Então vamos analisar o caso de $\text{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0$, para que isto aconteça é necessário que:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n\pi, \quad (16)$$

onde $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ Isolando P na Equação (16) obtemos a equação da carga crítica, assim

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}. \quad (17)$$

Porém, o conjunto solução para P é dado por

$$P \in \left\{ 0, \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \frac{4\pi^2 EI}{L^2}, \dots, \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}, \dots \right\}. \quad (18)$$

Queremos encontrar a menor carga que provoque a flambagem, para $n = 0$, temos $P = 0$ que representa a situação em que não tem nenhuma carga atuando sobre a coluna, para $n = 1$, temos o menor valor significativo para P , logo a carga crítica fica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (19)$$

O objetivo foi obtido na Equação (19), onde se determinou a equação da carga crítica P_{cr} . Porém para encontrar a solução y que representa a forma da linha elástica, fazemos

$$y = c_2 \text{sen} \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{L^2} \frac{1}{EI}} x \quad (20)$$

Melhorando esta equação, podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$y = c_2 \text{sen} \frac{\pi}{L} x \quad (21)$$

Esta Equação representa a forma flambada da coluna onde c_2 representa a maior deflexão lateral, logo este valor não pode ser especificado porque não se sabe o valor exato desta deflexão que pode ser considerada como pequena.

2.2.2. Coluna Engastada em uma das extremidades e na outra livre

Neste caso haverá uma diferente equação para $M(x)$, a coluna flambada possui uma forma específica para este caso, representada pela linha elástica em azul na Figura 5. Analisando o diagrama de corpo livre de uma seção arbitrária da coluna (Figura 6), pode-se perceber que diferentemente do caso anterior em que os esforços atuantes sobre a seção era apenas a carga P , há também a atuação de um momento referente a extremidade engastada que consequente diferenciará a equação do momento fletor para este caso.

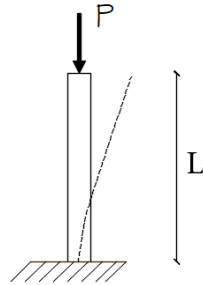


Figura 5: Coluna com uma extremidade engastada e outra livre. (Autoria Própria)



Figura 6: Diagrama de corpo livre. (Autoria Própria)

De acordo com [1], a equação $M(x)$ para este caso é a seguinte:

$$M(x) = P(\delta - y), \quad (22)$$

onde δ é o deslocamento que ocorre na extremidade livre. Para obter a equação diferencial que resolve este problema basta aplicar este momento fletor na equação (7), e proceder a resolução de forma parecida com o caso anterior. Assim,

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta - y). \quad (23)$$

Expressando-a na forma padrão, temos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = \frac{P\delta}{EI}. \quad (24)$$

Esta Equação é do tipo não homogênea (2) com $g(x)$ constante. Para solucionar a mesma temos que encontrar a solução y_c pra parte homogênea (lado esquerdo da equação) e esta solução terá de ser somada com a solução particular y_p e a solução geral vai ser da forma de (5).

Como já foi dito anteriormente esta solução é feita por etapas onde a primeira consiste em resolver a Equação homogênea associada a (24), ou seja, considerar $g(x) = 0$ e resolver esta Equação para obter o valor de y_c que é parte da solução. Porém, esta equação é igual a do primeiro caso no qual já temos este resultado onde

$$y_c = c_1 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + c_2 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x. \quad (25)$$

Para resolver a parte não homogênea, utilizamos o método da superposição com coeficientes a determinar, como $g(x)$ é constante, representa-se $y_p = A$, onde A é uma constante arbitrária que será derivada até a ordem da maior derivada, assim

$$\frac{dy_p}{dx} = 0 = \frac{dy_p^2}{dx^2}. \quad (26)$$

Substituindo estes valores em (24), temos a seguinte expressão:

$$0 + \frac{PA}{EI} = \frac{P\delta}{EI}. \quad (27)$$

Logo, $y_p = \delta$. De posse destas informações podemos escrever a solução geral y .

$$y = c_1 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + c_2 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \delta. \quad (28)$$

Precisamos determinar os valores de c_1 e c_2 que serão determinados pelas condições de contorno. Para $x = 0$ não haverá deslocamento neste ponto, ou seja, $y(0) = 0$. Aplicando esta condição em (28), temos

$$y(0) = c_1 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \times 0 + c_2 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \times 0 + \delta = 0 \Rightarrow c_1 = -\delta. \quad (29)$$

A outra condição será aplicada também em $x = 0$, onde a inclinação é nula para este ponto onde a mesma é representada por $\frac{dy}{dx}$. Matematicamente isto quer dizer que $\frac{dy}{dx}(0) = 0$, desse modo precisamos derivar a equação (28) que é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{P}{EI}} c_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \sqrt{\frac{P}{EI}} c_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x. \quad (30)$$

Aplicando a condição de contorno, temos o seguinte

$$\frac{dy}{dx}(0) = -\sqrt{\frac{P}{EI}} c_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \times 0 + \sqrt{\frac{P}{EI}} c_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \times 0 = 0. \quad (31)$$

Desta expressão temos que o único resultado que satisfaz a mesma é $c_2 = 0$. De posse dos valores das constantes podemos escrever a solução da ED, ou seja, a equação que rege a curva de deflexão, isto é,

$$y = -\delta \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \delta. \quad (32)$$

Desta forma concluímos com a solução da equação diferencial, porém o objetivo principal é expressar uma equação para a carga crítica P_{cr} para esta situação. Para isto considera-se que o deslocamento no topo da coluna será igual a deflexão lateral causada carga P , matematicamente isto quer dizer que $y(L) = \delta$, aplicando este resultado na Equação (28), temos:

$$y(L) = -\delta \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L + \delta = \delta. \quad (33)$$

Para que a Equação (33) seja satisfeita com $\delta \neq 0$, necessariamente,

$$\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0. \quad (34)$$

Isto ocorrerá sempre que

$$\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (35)$$

Desta forma, precisamos apenas isolar P na Equação (35), considerando $n = 1$ por ser o menor dos possíveis valores e assim obtem-se a expressão para a carga crítica P_{cr} .

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}. \quad (36)$$

2.2.3. Coluna com uma extremidade engastada e a outra apoiada por pino

Neste caso a coluna encontra-se engastada em uma das extremidades e na outra presa por pinos (Figura 7).

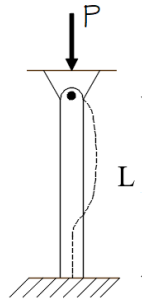


Figura 7: Coluna com uma extremidade engastada e na outra pino. (Autoria própria)

Segundo [3], e a equação para o momento fletor para esta situação é dada pela seguinte expressão:

$$M(x) = -Py - Vx. \quad (37)$$

Onde V é uma força que atua lateralmente na extremidade para equilibrar o momento de apoio no engaste, além da força axial P . Aplicando este valor de $M(x)$ na Equação (7), obtém-se a ED que descreve o comportamento da linha elástica para a este tipo de apoio, objetivando resolvê-la para encontrar a equação da carga crítica P_{cr} , assim

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py - Vx \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = \frac{-V}{EI} x. \quad (38)$$

Esta é uma equação diferencial de coeficientes constantes, linear e não homogênea de segunda ordem. Como vimos anteriormente esse tipo de ED se resolve por partes calculando as soluções y_c e y_p somando as mesmas para obter a solução geral y . Portanto, de resultados anteriores temos que

$$y_c = c_1 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + c_2 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x. \quad (39)$$

Além disso, para encontrar y_p será utilizado o método dos coeficientes indeterminados abordagem por superposição fazendo $y_p = Ax + B$ para representar a função $g(x)$ que para este caso é uma função de primeiro grau. Derivando até segunda ordem, temos que

$$\frac{dy_p}{dx} = A; \quad \frac{d^2 y_p}{dx^2} = 0. \quad (40)$$

Substituindo este resultado na Equação (38), temos a seguinte expressão

$$PAx + PB = -Vx. \quad (41)$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau de um membro com o outro da equação, temos que $B = 0$ e $PA = -V$, assim

$$A = -\frac{V}{P} \Rightarrow y_p = -\frac{V}{P} x. \quad (42)$$

Por fim a solução geral da será a seguinte:

$$y = c_1 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + c_2 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x - \frac{V}{P} x. \quad (43)$$

Da solução geral mostrada na equação acima, temos que encontrar os valores das constantes c_1 e c_2 como também o valor da força lateral V , para isto precisa-se de três condições de contorno, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$ e $\frac{dy}{dx}(L) = 0$.

Fazendo $y(0) = 0$, temos que $c_1 = 0$. Para $y(L) = 0$, temos

$$0 = c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} L - \frac{V}{P} L \Rightarrow c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} L = \frac{V}{P} L. \quad (44)$$

Para aplicar a terceira condição precisa-se de derivar a solução geral (43), derivando a mesma,

$$\frac{dy}{dx} = c_2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x - \frac{V}{P}. \quad (45)$$

Fazendo $\frac{dy}{dx}(L) = 0$, temos

$$\frac{dy}{dx}(L) = c_2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L - \frac{V}{P} = 0 \Rightarrow \frac{V}{P} = c_2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L. \quad (46)$$

Substituindo a Equação (46) na (44), obtém-se

$$c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} L = c_2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L \times L, \quad (47)$$

melhorando a Equação (47), temos a seguinte expressão:

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{P}{EI}} L = \sqrt{\frac{P}{EI}} L \quad (48)$$

Para resolver esta equação para P , precisa-se de auxílio de uma ferramenta matemática que possa fornecer precisamente os arcos onde $\operatorname{tg}(x) = x$. Para chegar neste resultado, pode-se fazer um gráfico e analisar onde haverá cruzamento ou interseção destas curvas (Gráfico 1).

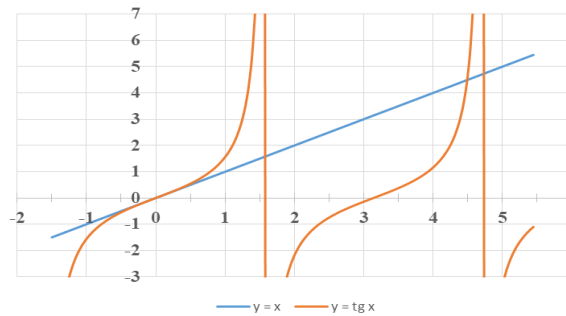


Gráfico 1: Visualização da interseção entre as curvas. (Autoria própria)

Sabe-se que as curvas analisadas se interceptam em vários pontos, logo o que será utilizado na análise de P_{cr} será o menor valor significativo para interseção destas. Através da análise gráfica, pode-se afirmar que o menor valor significativo será aproximadamente $4,494 \text{ rad}$. Assim, temos que

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = 4,494. \quad (49)$$

Isolando P na Equação (49) encontramos a carga crítica P_{cr} , logo

$$P_{cr} = \frac{4,494^2 EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{20,19 EI}{L^2}. \quad (50)$$

2.2.4. Coluna Biengastada

Neste caso a coluna encontra-se engastada em ambas as extremidades (Figura 11). Com o objetivo de escrever a expressão matemática que descreve a carga crítica P_{cr} de acordo com os procedimentos adotados nos casos anteriores, precisa-se obter o valor de $M(x)$ para escrever a equação diferencial representativa para esta situação.

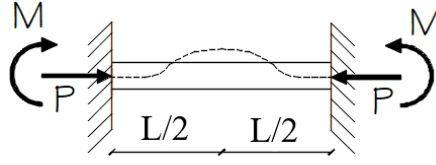


Figura 8: Coluna biengastada. (Autoria própria)

Segundo [5], o momento Fletor para uma coluna biengastada é dado por

$$M(x) = -Py + M_0, \quad (51)$$

onde P é a carga que atua nas extremidades da coluna e M_0 é o momento externo nas extremidades provocado pelo engastamento. Com este resultado agora pode-se aplicar na Equação da linha elástica (7), e escrever a equação diferencial que representa esta situação. Assim

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + M_0. \quad (52)$$

Escrevendo esta Equação na forma padrão, obtemos o seguinte resultado

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = \frac{M_0}{EI}. \quad (53)$$

Uma equação diferencial de segundo grau não homogênea que pode ser resolvida por partes assim como a Equação (24). Porém, já temos a primeira parte que é a solução complementar y_c que já foi resolvida nos casos anteriores, onde

$$y_c = c_1 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + c_2 \sen \sqrt{\frac{P}{EI}} x. \quad (54)$$

Para concluir com a solução precisamos encontrar a solução particular utilizando o mesmo método usado no segundo caso, o método dá superposição coeficientes a determinar, como $g(x)$ é constante fazemos $y_p = A$, derivando y_p até a segunda ordem obtemos que suas derivadas até segunda ordem são nulas como mostrado na Equação (26). Substituindo este resultado na equação diferencial, temos

$$0 + \frac{PA}{EI} = \frac{M_0}{EI} \Rightarrow A = y_p = \frac{M_0}{P}. \quad (55)$$

De posse de y_c e y_p , a solução geral é dada da seguinte forma

$$y = c_1 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + c_2 \sen \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \frac{M_0}{P}. \quad (56)$$

Para encontrar o valor das constantes c_1 e c_2 precisa-se de condições de contorno. Porém, neste caso analisado o deslocamento y e a inclinação $\frac{dy}{dx}$ serão nulos nas extremidades da coluna, matematicamente estas condições de contorno podem ser escritas respectivamente como $y(0) = 0$ e $\frac{dy}{dx}(0) = 0$. Aplicando a primeira condição obtém-se a seguinte expressão:

$$c_1 + \frac{M_0}{P} = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{M_0}{P}. \quad (57)$$

Para aplicar a segunda condição necessita-se da derivada da solução y encontrada, assim

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{P}{EI}} c_1 \sen \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \sqrt{\frac{P}{EI}} c_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x. \quad (58)$$

Aplicando o valor de c_1 e $\frac{dy}{dx} = 0$, temos que

$$c_2 \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0 \Rightarrow c_2 = 0. \quad (59)$$

De posse dos valores das constantes de integração pode-se escrever a solução geral da ED, porém objetiva-se encontrar uma equação para a carga crítica P_{cr} , para isto utiliza-se de uma terceira condição de contorno onde $\frac{dy}{dx}(L) = 0$. Aplicando este resultado e o valor das constantes de integração na Equação (58), temos

$$\frac{M_0}{P} \sqrt{\frac{P}{EI}} \sen \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0. \quad (60)$$

Nesta equação um dos termos terá de ser nulo, logo o único termo que pode zera é o senoidal, desta forma

$$\text{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0, \quad (61)$$

situação idêntica a que já foi mostrada no caso de colunas biarticuladas, então os resultados obtidos para o conjunto solução são os mesmos, assim

$$P \in \left\{ 0, \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \frac{4\pi^2 EI}{L^2}, \dots, \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}, \dots \right\}. \quad (62)$$

Precisa-se saber qual solução do conjunto representa melhor a equação da carga crítica. Analisando o comportamento da linha elástica da Figura (11), no ponto $x = \frac{L}{2}$ a inclinação também é nula neste ponto. Fazendo $\frac{dy}{dx} \left(\frac{L}{2} \right) = 0$, temos que

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{M_0}{P} \sqrt{\frac{P}{EI}} \text{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = 0. \quad (63)$$

Para melhorar esta Equação, aplicamos os resultados obtidos da Equação (16) na Equação (63), assim

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{M_0}{P} \frac{n\pi}{L} \text{sen} \frac{n\pi}{2} = 0. \quad (64)$$

Segundo [5], da Equação (acima) $\frac{M_0}{P} \neq 0$ e $\frac{n\pi}{L} \neq 0$, então o único termo que pode ser nulo será

$$\text{sen} \frac{n\pi}{2} = 0. \quad (65)$$

Isto ocorre apenas quando n for um número par. Assim, $n = 0, 2, 4, 6 \dots$

Portanto, o menor valor de n representará a equação para a carga crítica P_{cr} , assim temos que o menor valor significativo será $n = 2$. Logo, a equação de P_{cr} será obtida isolando P na Equação (16) e fazendo $n = 2$, assim, temos que

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}. \quad (66)$$

Além da explicação matemática existe uma explicação física para o valor de $n = 2$. Segundo [1], n equivale ao número de ondas existentes na linha elástica, se analisarmos a Figura 11, percebe-se que existe dois pontos de inflexão na curva, logo existe duas ondas nesta curva da linha elástica, de comportamento descrito por:

$$y = -\frac{M_0}{P} \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \frac{M_0}{P} \Rightarrow y = \frac{M_0}{P} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right). \quad (67)$$

2.3. Materiais e métodos

2.3.1. Materiais e equipamentos

- 3 metros de barra de aço A-36
- Prensa mecânica de capacidade de 2000 KN

2.3.2. Procedimento experimental

Devido limitações laboratoriais não foi possível fazer o experimento para todas as situações estudadas, assim os únicos casos possíveis de se obter êxito no ensaio foi os casos em que a coluna está apoiada por pinos em ambas as extremidades e apoiada por pino em uma extremidade e a outra engastada. O procedimento experimental foi dividido em duas etapas onde a primeira etapa foi realizada a preparação tanto das barras como do suporte para simular a condição de engaste, a segunda foi o ensaio de compressão na prensa mecânica para a determinação da carga crítica.

Na primeira parte, para fazer o suporte que simula o engaste para fazer o ensaio do caso da coluna engastada em uma extremidade e na outra presa por pinos, foi produzido soldando sobre uma barra de 150 milímetros de comprimento, 25,4 milímetros de largura e 6,35 de altura, 6 barras de mesma largura e altura que a anterior mas com comprimento de 50 milímetros, soldando três de um lado e três de outro deixando uma cava no centro da barra inferior com um afastamento uma da outra de 6,35 milímetros (Figura 9). Além disso, foi serrada as barras para realizar ensaios para dois comprimentos diferentes, precisamente 300 e 400 milímetros. Pode-se observar na Figura 10 que para cada ensaio as duas barras possuem comprimentos diferentes devido levar em consideração que na condição de simulação de engaste tem que somar o comprimento a ser usado no ensaio com a profundidade

da abertura do suporte, já na outro caso a barra será posta diretamente na prensa e tem o tamanho a ser utilizado no ensaio.



Figura 9: Suporte para simular engaste.
(Autoria própria)

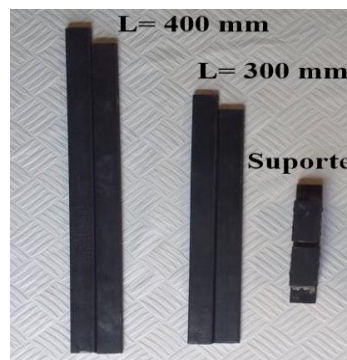


Figura 10: Material levado para laboratório.
(Autoria própria)

Na segunda parte, os itens mostrados na Figura 10 foram levados para laboratório para realização do ensaio. Para simular a coluna bi articulada a barra foi posta de forma mais reta possível na prensa mecânica (Figura 11) que realizou-se a aplicação de força medida em KN, onde o ensaio continuou até que fosse detectado visualmente a flambagem na barra. Para o caso de pino e engaste (Figura 12) o procedimento foi semelhante ao anterior, a única diferença foi que na parte inferior da coluna foi posto o suporte para simular o engaste. Este procedimento para os dois casos foram feitos duas vezes para cada um deles já que foi realizado ensaio para dois comprimentos diferentes.

Além disso, para determinar a carga crítica experimental para um valor bem aproximado, o ensaio foi filmado cada parte por uma câmera de celular posicionada de maneira que ficasse visível a barra durante o ensaio e o registro da carga que estava sendo aplicada pela prensa. Feito isto, a carga crítica foi determinada através da análise do vídeo referente a cada ensaio por meio da percepção da iminência de flambagem e o valor da carga que estava sendo aplicada neste momento mostrado no painel da prensa (Figuras 11 e 12). Estes procedimentos usados foram feitos tanto para as barras de aço A-36 de comprimento 300 milímetros quanto a de 400 milímetros.



Figura 11: Ensaio com barra biarticulada. (Autoria Própria)



Figura 12: Ensaio com barra engastada em uma extremidade e na outra pino. (Autoria própria)

2.4. Resultados e discussões

Através do processo de modelagem e resolução de equação diferencial de segunda ordem foi apresentado de forma clara e objetiva uma expressão para calcular a carga crítica referente as condições de apoio para cada caso estudado, onde os resultados são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: Expressão para carga crítica em cada caso de apoio. (Autoria própria)

TIPO DE APOIO	Pino-Pino	Engaste-Livre	Pino-Engaste	Engaste-Engaste
EXPRESSÃO PARA CARGA CRÍTICA	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{20,19EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$

Com estes resultados, para calcular a carga crítica de uma coluna basta aplicar os valores de E , I e L na equação referente as condições de apoio, obtendo assim P_{cr} teórica. Para uma análise ligeiramente comparativa com o valor experimental. O valor do menor momento de inércia para barra usada no experimento é $I = 541,97 \text{ mm}^4$, e o módulo de elasticidade do aço utilizado é $E = 205 \text{ GPa}$. Na Tabela 2 é apresentado os valores para P_{cr} teórica e experimental referente aos dois comprimentos utilizados nos casos que foram possíveis fazer o experimento.

Tabela 2: Comparativo entre a carga teórica e experimental. (Autoria Própria)

L(mm)	Pcr-TEÓRICA (KN)		Pcr-EXPERIMENTAL (KN)		ERRO (%)	
	Pino-Pino	Pino-Engaste	Pino-Pino	Pino-Engaste	Pino-Pino	Pino-Engaste
300	12,18	24,92	11,2	23,3	8,75	6,95
400	6,85	14,02	7,2	13,3	4,86	5,41

De posse dos valores obtidos na Tabela 2 pode-se afirmar que os resultados foram satisfatórios, verificando-se uma margem de erro relativamente pequena e inferior a 10% quando feita a comparação dos resultados teóricos e experimentais para cada caso analisado. Um dos fatores que pode justificar esse erro ocorrido é a baixa precisão da prensa mecânica que foi utilizada, além da mesma não ser específica para ensaio de flambagem. Além disso, existem outras possíveis fontes de erro, devido o procedimento experimental efetuado na determinação da carga crítica que foi obtida através da análise do vídeo do experimento, ou ainda as condições de apoio podem não ter sido simuladas perfeitamente.

Ainda da Tabela 2, pode-se constatar uma comprovação de um resultado teórico referente a estabilidade de colunas em função do comprimento da mesma, observa-se que assim como no teórico o valor de carga crítica experimental é menor para um maior comprimento de coluna.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com o que foi visto, é possível constatar que pode-se fazer uso das equações diferenciais, de segunda ordem, na análise da flambagem em colunas de maneira clara e objetiva, pois nos dois casos que foi realizado experimento obteve-se um erro consideravelmente pequeno, quando comparado os valores teóricos e experimentais. Desta forma, este trabalho contribui para a comunidade acadêmica proporcionando a explicação detalhada de aplicação matemática em um problema cotidiano de engenharia civil, facilitando a compreensão para aqueles que possuem dificuldades no entendimento teórico-prático. Considerando as devidas limitações, pelo fato de se considerar uma coluna ideal, na análise de todos os casos estudados, além de não ter sido possível a realização da parte experimental para todos as condições de apoio analisadas, não inviabilizam a qualidade deste. De todo modo recomenda-se para trabalhos posteriores, sobre o tema, mostrar outras aplicações em engenharias, acompanhado da parte experimental fortalecendo assim a prática e a teoria.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HIBBELER, Russel Charles. **Resistência dos materiais**. 7.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 637 p. ISBN: 9788576053736.
- [2] ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3.ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. 473p. ISBN: 9788534612913.
- [3] BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON JR., Elwood Russell. **Resistência dos materiais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2008. 1255 p. ISBN: 9788534603447.
- [4] TIMOSHENKO, Stephen P. **Resistência dos materiais**. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, 1976. 518p.
- [5] NASH, William S. **Resistência dos materiais**: resumo da teoria, problemas resolvidos, problemas propostos. São Paulo: McGraw-Hill, 1975. 384p. (Coleção Schaum).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA
Centro de Ciências Exatas e Naturais – CCEN

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

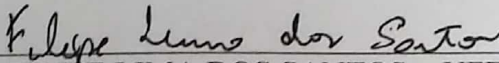
Das 15h00min às 17h00min horas do dia quatorze de agosto de dois mil e dezenove, no Hall da Central de aula V da UFERSA – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, reuniu-se a Banca Examinadora de defesa de trabalho de conclusão de curso de autoria do aluno **Anderson Geovany de Lucena Silva**, aluno do curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia desta universidade, N° de matrícula **2016011328**, com o título “**O Uso das Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem na Análise da Flambagem em Colunas**”. A Banca Examinadora ficou assim constituída por três membros: Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia, presidente da banca e orientador do Trabalho de Conclusão de Curso; Prof. Filipe Lima dos Santos e Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues como membros. Concluída a defesa, procedeu-se o julgamento pelos membros da banca examinadora, tendo o aluno obtido as seguintes notas: 10,0 ; 10,0; 10,0 . Apuradas as notas verificou-se que o aluno foi aprovado com média geral 10,0 . E para constar, eu, Antonio Ronaldo Gomes Garcia, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada pelos membros da banca examinadora, será assinada por todos.

Mossoró, 14 de agosto de 2019.

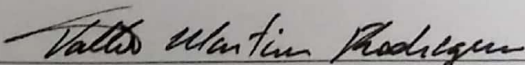
Assinatura dos membros da Banca Examinadora.



Prof. Dr. ANTONIO RONALDO GOMES GARCIA – UFERSA
Presidente e orientador



Prof. FILIPE LIMA DOS SANTOS. - UFERSA
Primeiro Membro



Prof. Dr. WALTER MARTINS RODRIGUES - UFERSA
Segundo Membro