

DETERMINAÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS E VELOCIDADES CRÍTICAS AEROELÁSTICAS EM ASA DE VANT: ESTUDO EXPERIMENTAL

Sanzia de Freitas Martins Diógenes¹, Daut de Jesus Nogueira Peixoto Couras², Rômulo Pierre Batista dos Reis³

Resumo: Este artigo determina experimentalmente as frequências naturais e as velocidades críticas aeroelásticas em uma semi-asa de Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT), projetada para a competição SAE BRASIL AeroDesign. A análise considera os principais fenômenos aeroelásticos: divergência, reversão de comando e *flutter*, resultantes da interação entre forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais. Esses efeitos representam riscos relevantes à estabilidade e à integridade estrutural da aeronave, sendo o *flutter* particularmente crítico, com ocorrência rigidamente limitada pelas normas, que exigem uma margem mínima de segurança de 15% em relação ao envelope de voo. O projeto da semi-asa adota uma configuração de viga engastada-livre e utiliza madeira balsa, a fim de alcançar elevada relação rigidez-peso. Os ensaios experimentais determinam as rigidezes flexionais (EI) e torcionais (GJ), além de identificar as frequências naturais e os modos de vibração por meio de excitação por impacto. Os modelos analíticos, alimentados com os parâmetros obtidos, estimam as velocidades críticas de instabilidade. Os resultados mostram boa concordância entre os dados experimentais e analíticos, o que valida a abordagem adotada. A metodologia aplicada contribui significativamente para a avaliação da segurança estrutural do VANT e fornece subsídios confiáveis para seu projeto aeroelástico e operação segura em voo.

Palavras-chave: Aeroelasticidade. Ensaios experimentais. Rigidez. Análise modal.

1. INTRODUÇÃO

A competição SAE BRASIL AeroDesign desafia anualmente estudantes universitários a projetar, documentar, construir e operar veículos aéreos não tripulados (VANTs) otimizados para o cumprimento de uma missão específica. Essa iniciativa promove um aprendizado multidisciplinar essencial na formação em engenharia aeronáutica, aproximando os participantes da realidade da indústria. Entre os aspectos centrais do projeto está a necessidade de assegurar a integridade estrutural e a estabilidade da aeronave, conforme os critérios estabelecidos no Relatório de Cargas e Aeroelasticidade, que envolvem a análise de comportamentos estáticos e dinâmicos, a definição do envelope operacional e a validação dos resultados teóricos [1]. Nesse contexto, a aeroelasticidade, que estuda a interação entre forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais, torna-se fundamental, pois tais influências podem comprometer o desempenho da aeronave, causar instabilidades e até provocar falhas estruturais severas [2].

Dentre os principais efeitos aeroelásticos, destacam-se: primeiramente, a divergência, instabilidade estática na qual a deformação estrutural se intensifica com o aumento da velocidade; em seguida, a reversão de comando, caracterizada pela perda de eficácia das superfícies de controle em função da flexão estrutural; e, por fim, o *flutter*, uma oscilação dinâmica autoexcitada que pode se tornar crítica se não for controlada [3]. De acordo com a norma [4], para garantir a segurança e a confiabilidade da aeronave, o *flutter* não deve ocorrer dentro do envelope de voo, devendo haver uma margem de segurança mínima de 15%. Tal exigência, por sua vez, impulsiona o desenvolvimento de estruturas mais leves e flexíveis, como asas de alto alongamento que, embora mais eficientes do ponto de vista aerodinâmico, são também mais vulneráveis a esses efeitos estruturais [5]. Em resposta a essa necessidade, o setor aeronáutico investe continuamente em modelos computacionais sofisticados, experimentos em túnel de vento e testes em voo, com o propósito de prever, analisar e mitigar esses fenômenos e as cargas associadas.

As frequências naturais são propriedades intrínsecas fundamentais de qualquer estrutura, descrevendo as taxas nas quais um sistema tende a vibrar na ausência de forças externas ou dissipação de energia. Para elementos estruturais críticos, como as asas de aeronaves, a determinação precisa dessas frequências é essencial para a análise da dinâmica estrutural e sua interação com cargas aerodinâmicas [6]. Além disso, as rigidezes flexionais e torcionais desempenham um papel crucial ao definir a resistência da estrutura à deformação por flexão e torção, sendo parâmetros centrais nas equações de movimento [7]. A frequência natural associada à vibração livre não amortecida pode ser determinada por testes de ressonância e é sensível a características como a curvatura da asa e a posição do centro de gravidade (CG). As rigidezes, por sua vez, influenciam a resistência de flexão e de torção,

e sua interação afeta diretamente a velocidade crítica, podendo gerar transições modais complexas, com impacto na previsão do *flutter* [8].

Dessa forma, aplicada a aeronaves de asa fixa, predominantes na aviação geral devido à sua eficiência e velocidade, observa-se que seu desempenho é fortemente condicionado pelos efeitos aeroelásticos [9]. A estrutura dessas asas, composta por elementos como longarina, revestimento e nervuras, é projetada com materiais leves para otimizar peso e eficiência e, conseqüentemente, reduzir o arrasto induzido e aumentar a sustentação [5]. Conforme [10], estudos mostram que reduções na rigidez de torção da asa, região de maior influência na rigidez torcional, podem interferir diretamente no fenômeno da divergência e ocasionar a redução da velocidade de *flutter*; e, assim, essas interações resultam em perda de estabilidade, levando a oscilações de grandes amplitudes.

Sob essa perspectiva, o trabalho em questão teve como objetivo principal realizar ensaios experimentais de vibração mecânica e rigidez estrutural em uma asa de aerodesign, a fim de determinar suas frequências naturais e velocidades críticas aeroelásticas associadas à divergência, reversão de comando e *flutter*. Para isso, foi conduzida uma análise modal experimental para a identificação das frequências naturais da estrutura e ensaios de rigidez flexional e torcional, para estimar as velocidades críticas. Os resultados foram comparados com os valores teóricos previamente calculados, validando, assim, as modelagens analíticas utilizadas. Dessa forma, pretende-se avaliar a confiabilidade das metodologias aplicadas e a capacidade da estrutura em resistir às instabilidades aeroelásticas previstas.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. Fundamentos e fenômenos aeroelásticos

A aeroelasticidade é classificada como o estudo da interação entre as forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais que atuam em estruturas flexíveis, sendo essencial para compreender os efeitos dessas forças combinadas sobre o comportamento estrutural em escoamento [11]. Os fenômenos aeroelásticos podem ser classificados em estáticos ou dinâmicos, dependendo da natureza da interação envolvida. Os efeitos estáticos correspondem a fenômenos não oscilatórios, que se tornam críticos quando a deformação da estrutura sob cargas aerodinâmicas afeta negativamente sua performance e integridade estrutural [8]. Por outro lado, os efeitos dinâmicos envolvem oscilações induzidas pelo escoamento, sendo o *flutter* o mais crítico entre eles, devido ao seu potencial de provocar falhas estruturais catastróficas [3]. Nesse contexto, o triângulo aeroelástico de Collar fornece uma representação conceitual das interações entre pares de forças dominantes e delimita as zonas onde ocorrem os distintos fenômenos aeroelásticos [12], conforme apresentado na Figura 1.

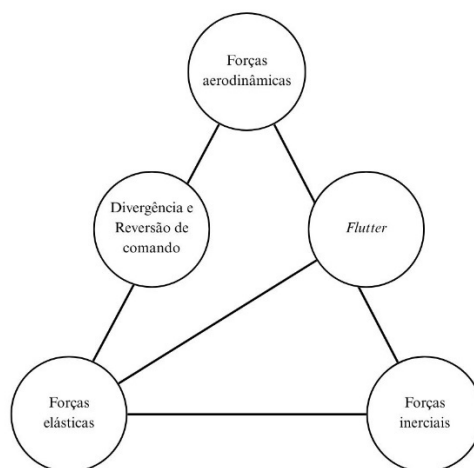


Figura 1. Triângulo de Collar. (Adaptado pela autora)

A representação utilizada neste trabalho constitui uma adaptação do modelo original, com o intuito de evidenciar os fenômenos aeroelásticos abordados pela autora, entretanto, mantendo a coerência com os princípios conceituais propostos por Collar. Embora a análise aeroelástica tenha surgido no desenvolvimento de grandes aeronaves, sua aplicação estende-se a veículos aéreos leves e não convencionais, como VANTs, cuja estrutura utiliza materiais de baixa densidade e elevada flexibilidade. Para essas aplicações, o uso de modelos analíticos simplificados tem se mostrado eficaz no entendimento dos mecanismos fundamentais, além de ser uma ferramenta educacional relevante no ensino de engenharia [13,14].

2.1.1. Divergência

A divergência representa uma instabilidade estática, caracterizada pela interação entre as cargas aerodinâmicas e a deformação estrutural da asa [6]. Durante o voo, uma deformação inicial da estrutura pode induzir um momento

aerodinâmico que atua no sentido de amplificar a torção. Embora a rigidez elástica da estrutura atue para resistir a essa torção independentemente da velocidade, as cargas aerodinâmicas aumentam significativamente com o acréscimo da velocidade de voo. Assim, a partir de determinado ponto, a rigidez estrutural torna-se insuficiente para manter a estabilidade da asa, resultando em grandes ângulos de torção e em um crescimento ilimitado da resposta estrutural [8]. Em modelos de viga engastada-livre com dois graus de liberdade (2-GDL), esse valor pode ser estimado por meio de análise estática linear [2].

2.1.2. Reversão de comando

A reversão de comando constitui uma instabilidade aeroelástica estática crítica, diferenciando-se de instabilidades dinâmicas como o *flutter*, mas de igual importância para a segurança e desempenho das aeronaves. Esse fenômeno ocorre quando a deflexão de uma superfície de controle, como um aileron, induz uma deformação elástica na estrutura da asa que atua em sentido contrário ao efeito aerodinâmico desejado [2]. Portanto, ao comandar um momento de rolagem por meio da deflexão do aileron, a flexibilidade torcional da asa pode induzir uma torção oposta, neutralizando ou até invertendo a resposta esperada da aeronave [16]. A velocidade de reversão é obtida pela condição em que o momento gerado pela deflexão do aileron é completamente anulado pela torção induzida na asa, podendo ser estimada com base na relação entre rigidez torcional e momento aerodinâmico do aileron [11].

2.1.3. Flutter

O *flutter* caracteriza uma instabilidade dinâmica autoexcitada, resultante do acoplamento entre modos vibratórios da estrutura e o escoamento de ar, levando a oscilações crescentes quando a velocidade crítica é ultrapassada [3]. Em sistemas lineares, esse fenômeno é identificado pela menor pressão dinâmica na qual um ou mais modos de vibração tornam-se instáveis, marcando o ponto de *flutter*. Com o avanço da capacidade computacional permitiu o desenvolvimento de métodos analíticos e numéricos mais sofisticados, os quais incorporam modelos aerodinâmicos e estruturais não lineares, além de modos de corpo rígido, permitindo análises mais precisas.

Nesse contexto, a otimização de projetos com restrições aeroelásticas e o uso de simulações avançadas, como o acoplamento fluido-estrutura, continuam sendo áreas estratégicas de pesquisa, fundamentais para garantir o desempenho e a segurança de aeronaves modernas [17]. O *flutter*, em sua forma clássica, pode ser analisado por meio de modelos com dois graus de liberdade, onde as equações diferenciais acopladas de flexão e torção são lineares e homogêneas. A solução desse sistema conduz a um problema de autovalores complexo, cuja parte real define a estabilidade. O ponto crítico ocorre quando o amortecimento efetivo do sistema se anula, indicando o início da instabilidade [2,8].

2.2. Estrutura da asa e propriedades mecânicas

No campo da aeronáutica, especialmente no contexto do aerodesign, o projeto da asa representa um desafio multidisciplinar que envolve uma abordagem iterativa. Nela, as suposições iniciais de geometria são refinadas por meio da análise de forças dinâmicas e cálculos de tensão e deflexão, considerando aspectos de aerodinâmica, estabilidade, estrutura e dinâmica de voo. A busca por um desempenho otimizado, capaz de atender aos objetivos da missão, exige a maximização das relações resistência-peso e rigidez-peso [18].

Nesse cenário, destacam-se os materiais de baixa densidade e desempenho mecânico satisfatório, como a madeira balsa, amplamente utilizada em protótipos de aeronaves de pequeno porte. Sua estrutura celular confere leveza e relativa flexibilidade [19], características que favorecem o manuseio e a adaptabilidade durante a fabricação e modificações estruturais. Embora sua aplicação seja limitada a regimes de carga moderados, a balsa é uma escolha viável em projetos que priorizam a eficiência estrutural com baixa penalização de massa.

A escolha da madeira balsa na construção estrutural está diretamente relacionada à rigidez específica, que é a razão entre módulo de elasticidade e densidade; e à resistência específica, que é a resistência mecânica por unidade de massa. Embora seu módulo de elasticidade seja inferior ao de muitos metais, sua densidade extremamente baixa resulta em uma rigidez específica elevada, sendo uma característica essencial para aumentar as frequências naturais da estrutura e, conseqüentemente, controlar vibrações indesejadas [18]. Esse equilíbrio entre leveza e desempenho mecânico torna a balsa uma excelente opção em aplicações aeronáuticas que exigem alta eficiência estrutural.

2.2.1. Rigidez e relação com a estrutura

A rigidez de uma estrutura está diretamente relacionada às propriedades dos materiais e à sua geometria, influenciando sua capacidade de resistir a deformações sob carregamento. A rigidez de flexão é determinada pela combinação entre o módulo de elasticidade longitudinal e o momento de inércia da seção transversal, enquanto a rigidez de torção depende do módulo de elasticidade transversal (cisalhamento) e do momento polar de inércia [16,20].

No caso da balsa, mesmo com limitações em propriedades elásticas, é possível obter um momento de inércia elevado com o uso de longarinas robustas e nervuras bem distribuídas, que definem o perfil aerodinâmico. Essa estratégia assemelha-se ao conceito de vigas em estruturas civis, nas quais o material é concentrado nas regiões mais afastadas do eixo neutro, maximizando a resistência aos momentos flettores [18].

A resistência à torção também é um aspecto crítico no projeto de asas. A fim de garantir rigidez torcional adequada, são adotadas configurações construtivas em forma de “caixa de torção”, compostas pela interação entre longarinas, nervuras e revestimento. Essa conformação fechada é significativamente mais eficiente do que seções abertas para resistir a carregamentos torcionais [18]. Nas construções com balsa, esse comportamento estrutural é viabilizado por meio de ligações rígidas obtidas por encaixe e colagem, permitindo que a asa se comporte como uma seção estrutural fechada.

2.2.2. Frequências naturais

A vibração é definida como qualquer movimento que se repete após um determinado intervalo de tempo. Quando um sistema é perturbado e passa a oscilar sem a atuação de forças externas, ele o faz em sua frequência natural, que é uma característica própria de sua configuração física. Assim, a análise das vibrações é fundamental para garantir margens adequadas de segurança estrutural, uma vez que a ocorrência de ressonância, quando a frequência de uma excitação externa coincide com uma das frequências naturais do sistema, pode resultar em amplitudes de oscilação excessivas e potencial falha estrutural [18]. Em sistemas não amortecidos, a resposta em ressonância pode teoricamente crescer indefinidamente, o que torna essencial evitar tais condições durante o projeto e operação de estruturas aeronáuticas [20].

As frequências naturais são determinadas pelas características de massa e rigidez do sistema [12]. Dado que a massa da asa é geralmente definida por requisitos de projeto e desempenho, a rigidez torna-se a principal variável de controle na prevenção de ressonâncias. Assim, o ajuste das propriedades estruturais deve considerar não apenas a resistência estática, mas também o afastamento das frequências naturais das possíveis excitações aerodinâmicas ou manobras da aeronave.

As formas modais associadas a essas frequências representam os padrões de deformação assumidos pela estrutura durante a vibração, sendo essenciais para identificar modos dominantes de resposta. Além disso, o amortecimento estrutural desempenha papel relevante na contenção das amplitudes oscilatórias, sobretudo próximas à ressonância [20]. Por fim, além de sua função preditiva, a análise de vibrações é amplamente utilizada para diagnóstico de falhas e manutenção, devido a alterações nos padrões vibratórios, como aumento de amplitudes ou variação de frequências, que podem indicar degradação estrutural ou danos aparentes.

2.3. Modelagem estrutural e ensaios experimentais

2.3.1. Modelos simplificados de viga

Para análises estruturais e dinâmicas de VANTs, a semi-asa é frequentemente modelada como uma viga engastada [21], abordagem simplificada que permite estimativas preliminares e compreensão do comportamento global da estrutura [16]. Modelos de viga capturam os principais efeitos estruturais de flexão, torção e cisalhamento e, quando subdivididos em seções, originam o modelo de bastão, com eixos de referência no centro de cisalhamento, minimizando o acoplamento modal [3].

Quando há interação relevante entre flexão e torção, adota-se o modelo com dois graus de liberdade (2-GDL), que considera o deslocamento vertical e a rotação da ponta da asa. Essa formulação resulta em equações diferenciais acopladas, cuja solução fornece frequências naturais e modos de vibração [8]. No caso não amortecido, o sistema reduz-se a um problema de autovalores envolvendo apenas as matrizes de massa e rigidez, permitindo a descrição modal completa por meio da superposição dos modos normais [22].

3. METODOLOGIA

3.1. Caracterização da estrutura experimental

A estrutura analisada neste trabalho consistia em uma asa desenvolvida pela Equipe PegAzuls para participação na competição SAE BRASIL AeroDesign, Classe Regular. Tratava-se de uma asa com geometria mista, composta por uma seção retangular na raiz e seções trapezoidais nas extremidades, solução comum para esse tipo de situação, devido à simplicidade construtiva e ao desempenho aerodinâmico.

A asa possuía uma envergadura total de 2,41 m, sendo dividida simetricamente em duas semi-asas a partir de uma seção central reforçada, na qual estava localizado o ponto de fixação principal, utilizado para o engaste da estrutura durante os ensaios experimentais. Essa condição de contorno permitiu que cada semi-asa fosse tratada como uma estrutura em balanço, engastada-livre, abordagem amplamente adotada em estudos aeroelásticos devido à sua representatividade simplificada das condições de voo real [2]. A representação da geometria escolhida, juntamente com algumas dimensões, foi destacada na Figura 2.

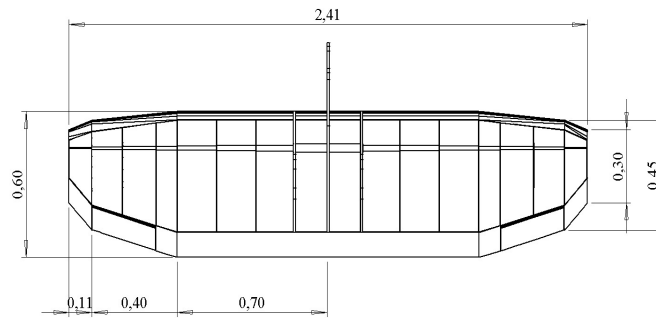


Figura 2. Vista superior da estrutura. (Autoria própria)

A construção da asa foi predominantemente realizada com madeira balsa, empregada em seus elementos estruturais internos, como a longarina, perfis e bordos de ataque e fuga. Este material foi escolhido por sua alta relação rigidez-peso e ampla aplicabilidade em protótipos aeronáuticos de baixo custo. Já os elementos da fuselagem e do trem de pouso foram produzidos pela equipe utilizando compósitos de fibra de carbono e espuma estrutural *Divinycell*, com o objetivo de aumentar a rigidez e reduzir o peso total da aeronave. O revestimento superficial da asa foi feito com fita adesiva de baixa densidade, atendendo à necessidade de minimização de massa exigida pelas regras da competição. Algumas características importantes estão destacadas na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros físicos da asa analisada. (Autoria própria)

Parâmetros	Símbolos	Valor
Envergadura total	b	2,41 m
Área	S	1,34 m ²
Massa	m	1,1 kg
Posição do centro de gravidade	x_{CG}	0,28 m em relação à corda na raiz

Durante os ensaios, a estrutura foi posicionada de modo que apenas uma semi-asa permanecesse livre, com o engaste localizado na seção central, garantindo condições adequadas para a aplicação do modelo estrutural adotado anteriormente, na Seção 2.3. A simetria geométrica e estrutural entre elas permitiu que os resultados obtidos para uma das metades fossem generalizados para ambas. A representação do modelo físico e o sistema de fixação adotado foi apresentado na Figura 3.

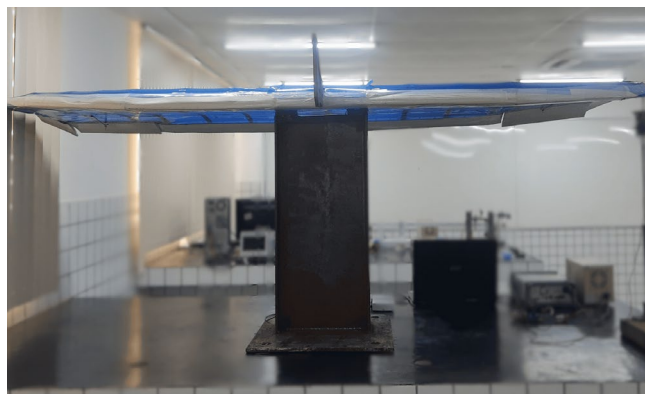


Figura 3. Configuração de ensaio da semi-asa, modelo engastado-livre. (Autoria própria)

Esta caracterização foi essencial para as etapas seguintes, onde foram determinados os parâmetros dinâmicos estruturais, como rigidez, frequências naturais e modos de vibração, para que, então, fossem comparados com os valores teóricos estimados com base na modelagem simplificada desenvolvida.

3.2. Ensaios de Rigidez flexional e torcional

O objetivo desta etapa experimental foi determinar os valores das rigidezes de flexão (EI) e de torção (GJ) da semi-asa, parâmetros fundamentais para a modelagem analítica e a estimativa teórica das velocidades críticas aeroelásticas, como discutido nas Seções 2.1 e 2.3.1. A obtenção precisa dessas propriedades mecânicas permitiu representar com maior fidelidade o comportamento dinâmico e estrutural da asa. Além disso, os módulos de rigidez obtidos puderam ser utilizados para a determinação de constantes elásticas equivalentes, como a constante de rigidez, a qual pode ser incorporada em formulações baseadas na Lei de Hooke [23], assumindo-se o regime linear e deformações pequenas, expressa pela Equação 1.

$$F = kx \quad (1)$$

Onde F representa a força aplicada e x representa o deslocamento medido. Os ensaios foram conduzidos separadamente para flexão e torção, utilizando a configuração engastada-livre descrita na Seção 3.1, com a aplicação de cargas conhecidas na extremidade livre da semi-asa. A resposta da estrutura foi medida por meio de deslocamentos verticais, para flexão e, ângulos de torção, para torcional, o que permitiu a posterior determinação dos parâmetros EI e GJ por ajuste linear das curvas força versus deslocamento ou torque versus ângulo, conforme será descrito nos resultados.

3.2.1. Ensaio de Rigidez Flexional

Para a determinação experimental da rigidez de flexão da semi-asa, foi adotada uma configuração estrutural engastada-livre, conforme descrito na Seção 3.1. A semi-asa foi fixada em uma estrutura de apoio, simulando o engaste na raiz, enquanto a extremidade oposta permaneceu livre. Sobre esta ponta, foi aplicada uma carga estática pontual P , direcionada perpendicularmente ao plano da asa, gerando uma curvatura descendente característica da deformação por flexão.

Essa configuração permitiu a caracterização da rigidez flexional com base na resposta deformacional da extremidade livre. O deslocamento vertical resultante, foi medido por meio de um transdutor de deslocamento linear (LVDT) previamente calibrado em bancada. O processo de calibração envolveu a aplicação de deslocamentos conhecidos e a obtenção da curva de resposta do sensor, o que assegurou a linearidade e repetibilidade das medições. O esquema de carregamento e apoio utilizados no ensaio está representado na Figura 4.

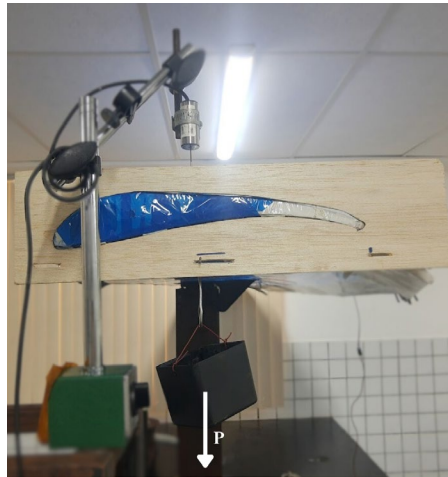


Figura 4. Ensaio de rigidez flexional. (Autoria própria)

Assumindo o comportamento linear elástico, a constante de rigidez de flexão (k_k) foi determinada a partir da Equação 1, e EI foi estimada utilizando a expressão clássica da teoria da flexão para vigas de Euler-Bernoulli [23], conforme apresentado na Equação 2.

$$EI = \frac{Pl^3}{3y_{m\acute{a}x}} \quad (2)$$

Sendo, l o comprimento da semi-asa e $y_{m\acute{a}x}$ o deslocamento medido. Em resumo, os dados obtidos experimentalmente foram utilizados para calcular o valor de EI, que posteriormente foi comparado ao valor estimado teoricamente com base na geometria e nas propriedades mecânicas dos materiais.

3.2.2. Ensaio de Rigidez Torcional

O ensaio de rigidez torcional teve como objetivo determinar o parâmetro estrutural GJ , que representava a rigidez de cisalhamento associada à torção da semi-asa. Para isso, a configuração experimental foi semelhante à do ensaio de flexão, com aplicação de um momento torsor na extremidade livre da estrutura, como demonstrado na Figura 5.



Figura 5. Ensaio de rigidez torcional. (Autoria própria)

A geração do torque foi realizada por meio de um braço de alavanca acoplado à estrutura de apoio, na ponta da asa, com aplicação de uma força conhecida perpendicular ao braço, o que permitiu a obtenção da Equação 3.

$$M_t = F \cdot d \quad (3)$$

Onde F é o peso aplicado e d é a distância do ponto de aplicação da força ao eixo de torção da seção. A medição do ângulo de torção (θ) foi feita utilizando duas abordagens complementares: um goniômetro mecânico, posicionado para acompanhar a rotação relativa da seção transversal; e análise de imagem, por meio de fotos sequenciais do deslocamento angular da ponta, o que permitiu maior precisão na obtenção do gráfico.

Assumindo o regime linear elástico e uma distribuição uniforme de cisalhamento, a relação entre torque e ângulo de torção foi descrita por [23], como apresentado na Equação 4.

$$GJ = \frac{Tl^3}{\delta\theta} \quad (4)$$

Onde T é o torque aplicado, l o comprimento da viga e $\delta\theta$ a rotação angular da extremidade livre. O valor experimental de GJ , obtido a partir dos dados de torque e ângulo de torção, foi utilizado posteriormente nas estimativas teóricas das velocidades críticas aeroelásticas.

3.3. Ensaio de vibrações mecânicas

O objetivo do ensaio foi identificar as frequências naturais e os modos predominantes de vibração da semi-asa, visando sua caracterização dinâmica e posterior aplicação na estimativa da velocidade crítica de *flutter*. Com a configuração estrutural descrita na Seção 3.1, a excitação foi realizada por impacto mecânico próximo à extremidade livre, região de maior amplitude nos modos flexionais e torcionais, favorecendo a excitação simultânea dos principais modos dinâmicos.

O sistema de instrumentação contou com um acelerômetro posicionado em ponto estratégico para captar a resposta vibratória, um sistema de aquisição multicanal para digitalização dos sinais e um *software* de tratamento de dados, *DAQexpress*, para visualização e análise dos dados.

Adicionalmente, utilizou-se um sistema de excitação eletrodinâmico (*shaker*) com fonte e gerador de funções. No entanto, devido à baixa densidade e rigidez da madeira balsa, observou-se limitação na excitação de baixas frequências, especialmente nos modos torcionais fundamentais, o que reforçou a escolha do impacto manual como principal método de excitação. A identificação modal foi realizada por meio da Transformada Rápida de Fourier (FFT), obtida pela razão entre a aceleração medida e a força de impacto em função da frequência. Os picos nas FFTs indicaram as frequências naturais, associadas visualmente às formas modais flexionais e torcionais. Esses resultados, aliados aos parâmetros dos ensaios de rigidez (Seções 3.2.1 e 3.2.2), fundamentaram a validação da modelagem teórica e a estimativa das velocidades críticas aeroelásticas.

Ademais, para obtenção dos resultados foram utilizadas as Equações 5 e 6.

$$\omega_\kappa = \sqrt{\frac{K_\kappa}{I_\kappa}} \quad (5)$$

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{K_\theta}{I_\theta}} \quad (6)$$

Sendo K as constantes de rigidez de flexão e torção, e I o momento de inércia elástico e polar, respectivamente.

3.4. Estimativa teórica das velocidades críticas

Os parâmetros estruturais utilizados a seguir foram obtidos por meio dos ensaios descritos nas Seções 3.2. e 3.3.

3.4.1. Divergência

Para o modelo linearizado da semi-envergadura engastada-livre com 2-GDL, desconsiderando os efeitos inerciais e de amortecimento, a condição de equilíbrio de momentos na torção foi expressa na Equação 7 [2].

$$GJ\theta = \frac{1}{2}\rho V_D^2 S \underline{c} \alpha_\theta \quad (7)$$

Isolando a velocidade crítica de divergência (V_D), obteve-se a Equação 8.

$$V_D = \sqrt{\frac{2GJ}{\rho S \underline{c} \alpha_\theta}} \quad (8)$$

Onde, $\underline{c}$ represent a corda média aerodinâmica e α_θ a derivada da força de sustentação em relação ao ângulo de torção. Essa equação permitiu a aplicação direta dos parâmetros experimentais obtidos nos ensaios estruturais e modais, o que forneceu uma estimativa teórica da velocidade crítica para a ocorrência do fenômeno de divergência aeroelástica.

3.4.2. Reversão de comando

A condição limite pôde ser expressa quando o momento torcional aerodinâmico M, induzido pela deflexão do aileron, gerou uma deformação tal que a deflexão efetiva da superfície tendeu a zero. Essa condição é representada pela Equação 9 [11].

$$\delta_{efetiva} = -\frac{M}{GJ} \quad (9)$$

Onde M é o momento aerodinâmico devido à deflexão do aileron, que é a função da velocidade. A velocidade crítica de reversão de comando (V_R) ocorreu quando a deflexão efetiva se anula. Assumiu-se uma distribuição linear do momento aerodinâmico com a velocidade e a deflexão do aileron, como representado na Equação 10.

$$V_R = \sqrt{\frac{GJ}{\rho b^3 C_m^\delta}} \quad (10)$$

Nesse caso, o C_m^δ representou a derivada do momento aerodinâmico em função da deflexão do aileron. Essa equação forneceu uma estimativa teórica da velocidade na qual a autoridade de comando se tornou nula, o que representou um limite operacional crítico para aeronaves com superfícies de controle em regiões de elevada flexibilidade estrutural.

3.4.3. Flutter

Esse modelo considerou o efeito da excentricidade (e) entre o centro de massa da seção e o eixo elástico da semi-asa, responsável pelo acoplamento dinâmico entre a translação vertical e a rotação. A modelagem do sistema, por unidade de comprimento, foi representada pelas Equações 11-14 [20].

$$M\ddot{\vec{x}} + C\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{F} \quad (11)$$

Nessa equação, $\vec{x}$ representa o vetor nos eixos de torção e flexão, M a matriz de massa, C a matriz de amortecimento, K a matriz de rigidez e F representa o vetor de forças externas. Contudo, para o caso de vibração livre e não amortecida, foram desconsideradas as forças externas e a matriz de amortecimento reduzindo o sistema para Equação 12.

$$M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = 0 \quad (12)$$

A matriz de massa, por sua vez, foi construída com base nos parâmetros físicos da seção e está definida na Equação 13.

$$M = \begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & J_\theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

Sendo m a massa da semi-asa, J_θ o momento de inércia torcional da meia-asa em torno do eixo elástico e x_θ a distância do eixo elástico ao centro de gravidade. De forma complementar, a matriz de rigidez foi expressa pela Equação 14.

$$K = \begin{bmatrix} K_\kappa & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

Onde, K_κ é a constante de rigidez de flexão e K_θ a constante de rigidez de torção, ambas obtidas experimentalmente. Com a definição dessas matrizes, foi possível modelar o sistema dinâmico acoplado, o qual foi resolvido por meio de análise modal. Essa abordagem permitiu a obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração da estrutura. A introdução da excentricidade no modelo foi fundamental para representar adequadamente o acoplamento flexo-torcional, característico de estruturas de asa com distribuição assimétrica de massa [2].

Na sequência, para a análise aeroelástica, as forças aerodinâmicas foram linearizadas em função da velocidade do escoamento. O fenômeno de *flutter* foi identificado quando um dos modos vibratórios apresentou parte imaginária nula, indicando instabilidade oscilatória sustentada. A velocidade crítica, por sua vez, foi determinada pela solução de um problema de autovalores não conservativos. Por fim, utilizou-se os parâmetros estruturais obtidos experimentalmente, juntamente com os coeficientes aerodinâmicos característicos do perfil [2,11].

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Rigidez flexional e torcional

Os parâmetros estruturais fundamentais para a análise aeroelástica, como EI e GJ, foram determinados a partir de dados experimentais e propriedades geométricas da asa, tendo sido aplicadas as equações detalhadas na Seção 3.2. Inicialmente gerou-se um gráfico para determinação das constantes de rigidez apresentadas nas Figuras 7 e 8.

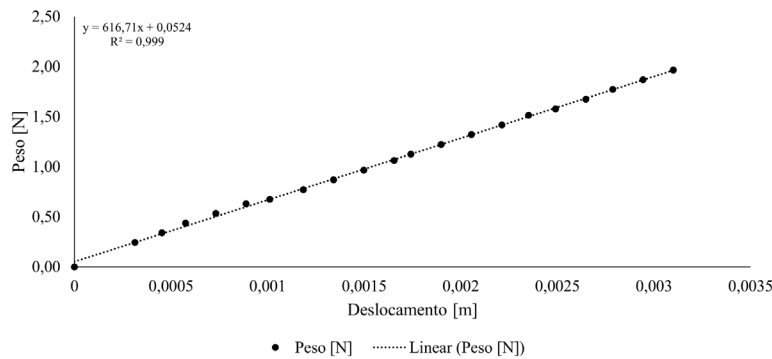


Figura 7. Gráfico da constante de rigidez de flexão. (Autoria própria)

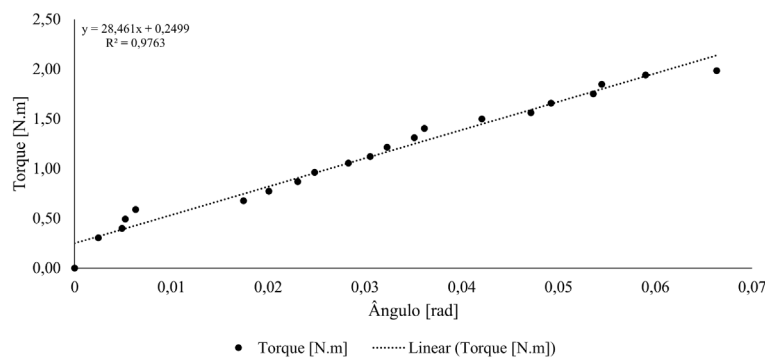


Figura 8. Gráfico da constante de rigidez de torção. (Autoria própria)

Após isso, foram inseridos os valores nas equações abordadas anteriormente e obtidos os resultados presentes na Tabela 2.

Tabela 2. Comparação entre as constantes de rigidez. (Autoria própria)

	Experimental	Analítico	% Erro
K_k (N/m)	616,71	633,87	2,78
K_θ (N.m/rad)	28,46	29,93	4,92

E, ao aplicar os valores para determinação da rigidez do material obteve-se $EI = 304,26 \text{ N/m}^2$ e $GJ = 35,92 \text{ (N.m}^2/\text{rad)}$. Com o propósito de obter frequências naturais, os valores foram aplicados nas Equações 5 e 6, e foram determinados os valores presentes na Tabela 3.

Tabela 3. Comparação entre as frequências obtidas. (Autoria própria)

	Experimental	Analítico	% Erro
Flexão (Hz)	13,97	14,17	1,36
Torção (Hz)	22,44	23,02	2,49

4.2. Frequências naturais

A análise modal experimental realizada sobre a semi-asa permitiu a identificação das frequências naturais associadas aos dois modos predominantes de vibração: flexão vertical e torção. Os ensaios foram conduzidos por meio de excitação impulsiva, conforme representado na Figura 9.

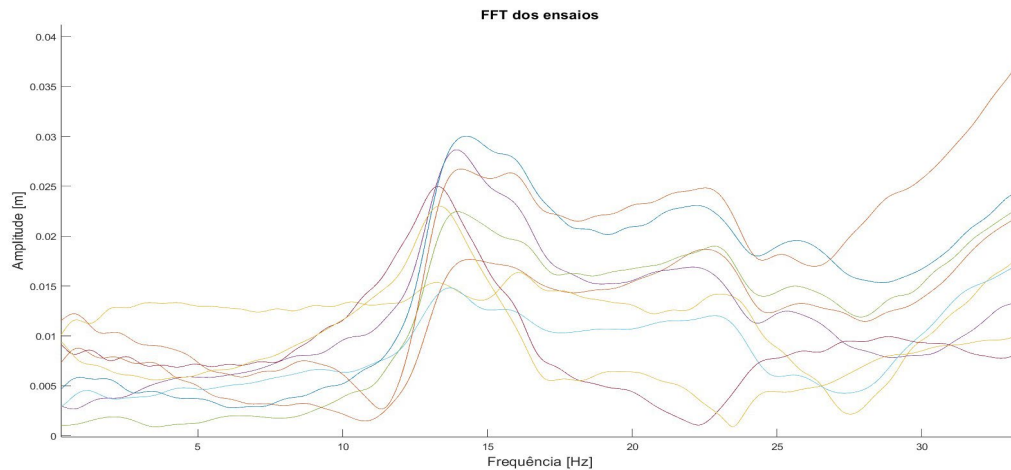


Figura 9. Frequências obtidas a partir da repetição do ensaio. (Autoria própria)

Por meio do gráfico gerado, notou-se frequências que se repetiam de acordo com o ciclo do ensaio. Assim, realizou-se, a média entre esses valores e obtiveram-se as frequências naturais correspondentes de $f_k = 13,81 \text{ Hz}$ e $f_\theta = 22,87 \text{ Hz}$. Estes valores estão demonstrados na Figura 10.

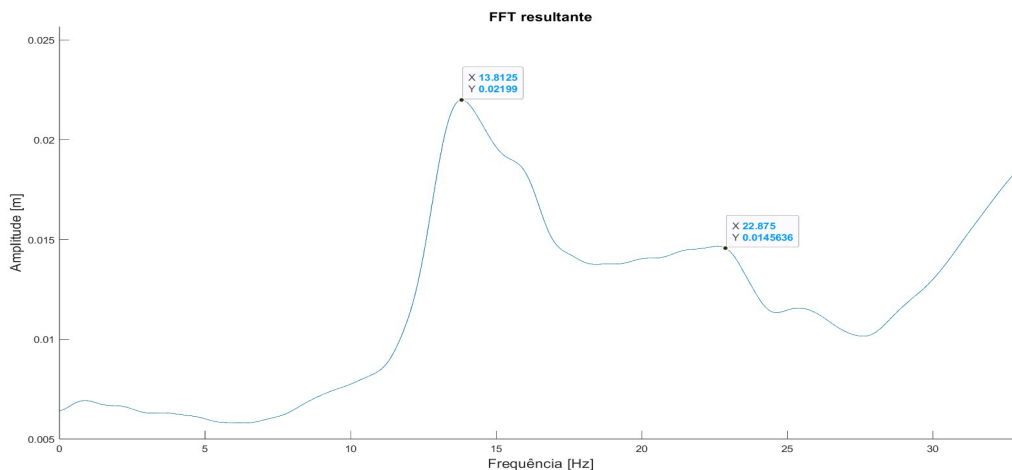


Figura 10. Média entre as frequências obtidas. (Autoria própria)

As demais vibrações observadas foram atribuídas a partes da estrutura da asa que não estavam adequadamente fixadas, tornando-se suscetíveis à excitação dinâmica. Além disso, a própria viga de ferro, embora apresente elevada rigidez, possui vibrações inerentes à sua constituição estrutural. Dessa forma, ao comparar os valores obtidos pela análise modal e os inseridos nas Equações 5 e 6, a aproximação entre eles resultou em erros experimentais menores que 5%.

Assim, com base nos valores experimentais de rigidez e nas propriedades geométricas e aerodinâmicas da semi-asa, foram determinadas as velocidades críticas citadas no presente trabalho, sendo elas: $V_D = 49,04 \text{ m/s}$, $V_R = 35,17 \text{ m/s}$, $V_f = 64,50 \text{ m/s}$.

4.4. Discussão dos resultados

Os resultados mostraram boa concordância entre os dados experimentais e os analíticos, validando a metodologia empregada na determinação das frequências naturais e velocidades críticas aeroelásticas da semi-asa do VANT. Tal verificação foi essencial para a confiabilidade de modelos estruturais [18]. As rigidezes flexionais (EI) e torcionais (GJ) foram obtidas por medições mecânicas e análise de imagem, garantindo maior precisão dos parâmetros estruturais. A acurácia desses valores foi determinante para a validade da modelagem aeroelástica [22].

A excitação por impacto, associada à análise das FFTs, foi eficaz na identificação dos modos vibratórios. O uso do *shaker* mostrou-se limitado para excitar modos torcionais de baixa frequência, devido à baixa rigidez da madeira balsa, o que justificou a escolha do impacto manual como método principal. A boa correlação entre os resultados reforçou a representatividade do modelo adotado, possibilitou ajustes de geometria e materiais para otimização estrutural. A iteração no projeto, apoiada por ferramentas computacionais e validada experimentalmente, permite elevar as frequências críticas e maximizar a rigidez específica [2]. A abordagem adotada demonstrou-se eficaz, o que serviu como base metodológica para futuras análises aeroelásticas em estruturas similares, reforçando a importância da validação empírica no desenvolvimento de sistemas aeronáuticos.

5. CONCLUSÃO

A determinação experimental das frequências naturais e das velocidades críticas aeroelásticas de uma semi-asa de Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT) foi realizada com êxito, atingindo o objetivo principal deste trabalho. A metodologia desenvolvida permitiu a caracterização detalhada do comportamento aeroelástico da estrutura, o que forneceu subsídios técnicos fundamentais para a otimização e a segurança do projeto. As rigidezes flexional (EI) e torcional (GJ) foram determinadas com base em ensaios experimentais e parâmetros geométricos da asa, possibilitando a definição precisa dos principais parâmetros estruturais envolvidos na análise aeroelástica. As frequências naturais e os modos de vibração (flexional e torcional) foram identificados por meio de excitação por impacto e análise das FFTs, revelando-se coerentes com o comportamento físico esperado da estrutura.

Com base nos parâmetros experimentais obtidos, foram aplicados modelos analíticos para a estimativa das velocidades críticas aeroelásticas associadas à divergência, reversão de comando e *flutter*. Os resultados teóricos e experimentais apresentaram boa concordância, validando a abordagem metodológica empregada. Assim, a presente investigação contribui significativamente para o desenvolvimento de metodologias confiáveis de avaliação aeroelástica em estruturas de VANTs, o que forneceu suporte técnico robusto para o projeto estrutural e para a prevenção de instabilidades, especialmente aquelas relacionadas ao *flutter*, conforme as exigências normativas de segurança da aviação.

Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se a aplicação de técnicas numéricas de elementos finitos acopladas a simulações fluidodinâmicas (CFD-FEM) para análise aeroelástica em regime não linear, permitindo a

modelagem de efeitos não capturados por abordagens lineares. Além disso, a realização de ensaios em túnel de vento e a análise de casos em voo poderiam complementar a validação dos modelos desenvolvidos, ampliando a aplicabilidade dos resultados em contextos reais de operação.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SAE BRASIL. Regulamento da competição SAE BRASIL *AeroDesign* 2024: Rev. 00. São Paulo: SAE BRASIL, 2023. Disponível em: https://saebrasil.org.br/wp-content/uploads/2023/05/Regulamento_SAE_BRASIL_AeroDesign_2024_Rev00.pdf. Acesso em: 19 jul. 2025.
- [2] HODGES, Dewey H.; PIERCE, G. Alvin. **Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [3] WRIGHT, Jan R.; COOPER, Jonathan E.. **Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads**. Chichester: Wiley, 2007.
- [4] FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION. **14 CFR 25.629**: §25.629 Aeroelastic stability requirements. Washington, Dc: National Archives And Records Administration, 2025. Disponível em: <https://www.ecfr.gov/current/title-14/section-25.629>. Acesso em: 19 jul. 2025.
- [5] AFONSO, F. *et al.* The effect of stiffness and geometric parameters on the nonlinear aeroelastic performance of high aspect ratio wings. **Proceedings Of The Institution Of Mechanical Engineers**, Part G: Journal of Aerospace Engineering, [S.l.], v. 231, n. 10, p. 1824-1850, 25 nov. 2016. SAGE Publications. <http://dx.doi.org/10.1177/0954410016675893>.
- [6] AMOOZGAR, M.R. *et al.* Aeroelastic stability analysis of aircraft wings with initial curvature. **Aerospace Science And Technology**, [S.l.], v. 107, p. 106241, dez. 2020. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2020.106241>.
- [7] BUCHER, I.; EWINS, D. J.. Modal analysis and testing of rotating structures. **Philosophical Transactions Of The Royal Society Of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, [S.l.], v. 359, n. 1778, p. 61-96, 15 jan. 2001. The Royal Society. <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2000.0714>.
- [8] FUNG, Y. C.. **An Introduction to The Theory Of Aeroelasticity**. New York: Dover Publications, 1993.
- [9] KHEIRI, M.; RIAZAT, M.. Aeroelastic stability of imperfectly supported high-aspect-ratio wings. **The Aeronautical Journal**, [S.l.], p. 1-16, 23 jun. 2025. Cambridge University Press (CUP). <http://dx.doi.org/10.1017/aer.2025.10028>.
- [10] TRIPATHI, Dheeraj *et al.* Experimental investigation on the synchronization characteristics of a pitch-plunge aeroelastic system exhibiting stall flutter. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, [S.l.], v. 32, n. 7, 1 jul. 2022. AIP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1063/5.0096213>.
- [11] BISPLINGHOFF, Raymond L. *et al.* **Aeroelasticity**. Mineola: Dover Publications, 1996.
- [12] COLLAR, A. R.. The Expanding Domain of Aeroelasticity. **The Journal Of The Royal Aeronautical Society**, [S.l.], v. 50, n. 428, p. 613-636, ago. 1946. Cambridge University Press (CUP). <http://dx.doi.org/10.1017/s0368393100120358>.
- [13] BIDINOTTO, Jorge Henrique; BELO, Eduardo Morgado. Modal Shape Analysis Using Thermal Imaging. **Journal of Aerospace Technology And Management**, [S.l.], v. 7, n. 2, p. 185-192, 30 maio 2015. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.5028/jatm.v7i2.450>.
- [14] SADRAEY, Mohammad H.. **Aircraft design: a systems engineering approach**. New Hampshire: Wiley, 2013.
- [15] JONSSON, Eirikur *et al.* Flutter and post-flutter constraints in aircraft design optimization. **Progress In Aerospace Sciences**, [S.l.], v. 109, p. 100537, ago. 2019. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.paerosci.2019.04.001>.
- [16] MEGSON, T.H.G.. **Aircraft Structures for engineering students**. 4. ed. Oxford: Elsevier, 2007.
- [17] DONE, G. T. S.. Past and future progress in fixed and rotary wing aeroelasticity. **The Aeronautical Journal**, [S.l.], v. 100, n. 997, p. 269-280, set. 1996. Cambridge University Press (CUP). <http://dx.doi.org/10.1017/s0001924000028906>.
- [18] NORTON, Robert L.. **Machine design: an integrated approach**. 4. ed. Worcester: Pearson Education, 2006.
- [19] BORREGA, Marc *et al.* Composition and structure of balsa (*Ochroma pyramidale*) wood. **Wood Science And Technology**, [S.l.], v. 49, n. 2, p. 403-420, 23 jan. 2015. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s00226-015-0700-5>.
- [20] RAO, Singiresu S.. **Mechanical vibrations**. 4. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2003.
- [21] BANERJEE, J.R. Explicit frequency equation and mode shapes of a cantilever beam coupled in bending and torsion. **Journal Of Sound And Vibration**, [S.l.], v. 224, n. 2, p. 267-281, jul. 1999. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1999.2194>.
- [22] MEIROVITCH, Leonard. **Fundamentals of Vibrations**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2001.
- [23] TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N.. **Theory of elasticity**. Palo Alto: McGraw-Hill Book Company, 1951.