

ANÁLISE DIFERENCIAL DE CIRCUITOS RC E RL A PARTIR DOS MÉTODOS NUMÉRICOS DE EULER, HEUN E RUNGE-KUTTA

Hugo Dias Giló

Resumo: Este trabalho aborda os métodos numéricos de Euler, Heun e Runge-Kutta para a resolução de equações diferenciais ordinárias direcionadas para aplicações com circuitos RC e RL, tendo como objetivo a comparação da eficiência desses métodos em se aproximar da solução analítica dessas problemáticas. A análise é feita a partir da construção de algoritmos iterativos na IDE Scilab que calculam o *Erro Médio Absoluto* e o *Erro Médio Relativo* para os diferentes métodos e para diferentes quantidades de repartições de um intervalo de tempo. Os experimentos consistiram na análise de quatro problemas distintos, onde constatamos a boa adequação dos métodos, e o método de Runge Kutta de quarta ordem teve um melhor desempenho, assim, destacando-se dos demais.

Palavras-chave: Circuito RC, Circuito RL, Euler, Heun, Runge-Kutta

1. INTRODUÇÃO

Segundo [1], desde o fim da década de 1940, a vasta disponibilidade dos computadores digitais levou a uma verdadeira explosão no uso e desenvolvimento dos métodos numéricos. Tais métodos abrem portas para resolver problemas que, em diversas situações, trazem consigo soluções analíticas complexas ou até impossíveis de se obter.

Ademais, entrelaçado à essas problemáticas que os métodos numéricos desejam resolver, há o conhecimento teórico acerca de alguma área específica, como na física por exemplo, em que tal conhecimento se torna necessário para a elaboração dos modelos matemáticos. Em relação a isso, [1] diz que: “O conhecimento e o entendimento da problemática são pré-requisitos para a implementação efetiva de qualquer ferramenta”.

Dentre os diversos métodos numéricos, existem os que servem para resolver Equações Diferenciais com Problema de Valor Inicial (PVI), como por exemplo, os métodos de Euler, Heun e Range-Kutta. Essas equações, segundo [3], ocorrem com muita frequência na descrição de fenômenos da natureza. Um exemplo é o comportamento da carga de um capacitor e a corrente de indutores com o passar do tempo em um circuito elétrico.

Assentados nesses referidos métodos numéricos, esse trabalho objetiva avaliar a eficiência na aplicação destes para resolver de Equações Diferenciais Ordinárias com Problema de Valor Inicial aplicado a certos circuitos elétricos com Capacitores e também com Indutores frente às soluções analíticas. Para atender aos objetivos propostos, este documento está organizado da seguinte forma: no secção 2, está contida a fundamentação teórica, a qual serve para embasar conceitos matemáticos (sobre EDOs e os métodos numéricos para resolvê-las) e físicos (sobre capacitores e indutores) acerca do tema deste trabalho; no secção 3, está a metodologia utilizada, abarcando os algoritmos e os problemas a serem analisados; no secção 4, constam os resultados e discussões dos problemas; nos secções 5 e 6, se encontram as conclusões sobre o trabalho e as referências bibliográficas, respectivamente.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Equações Diferenciais

2.1.1 Conceitos

A priori, será contemplado neste trabalho um resumo sobre as equações diferenciais para melhor compreensão do trabalho, baseado em [4,5,7]. Este resumo conterá informações sobre alguns conceitos e definições, porém não abordando deduções de teoremas, pois fogem do escopo do presente trabalho. Para um maior aprofundamento destes conceitos, sugere-se a leitura de [4,5,7].

Vale ressaltar que, nesse trabalho, os problemas envolvem somente equações diferenciais ordinárias, lineares e de primeira ordem, logo, os conceitos apresentados serão somente os que as rodeiam.

Sobre isso, [4] mostra:

Definição 2.1: Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de **equação diferencial (ED)**.

Segundo [7], as equações podem ser classificadas quanto ao **tipo**, **ordem**, e a **linearidade**.

Quanto ao **tipo**, uma equação diferencial pode ser **ordinária** ou **parcial**. Ela é ordinária se as funções incógnitas forem funções de somente uma variável. Caso contrário ela é parcial. Portanto as derivadas que aparecem na equação são derivadas totais.

Quanto a **ordem**, uma equação diferencial pode ser de **1ª**, **de 2ª**, ..., **de n-ésima** ordem, dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação diferencial ordinária de ordem n pode ser escrita na forma da Equação 1:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Quanto à **linearidade**, uma equação diferencial pode ser **linear** ou **não linear**. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas. Por exemplo, uma equação diferencial ordinária linear de ordem n é uma equação que pode ser escrita na Equação 2:

$$a_n(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (2)$$

A **solução** de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma função ou uma família destas contidos em um intervalo I de modo a validar a igualdade da Equação 1.

2.1.2 Problema de Valor Inicial

Conceitua-se Problema de Valor Inicial (PVI) como aquela EDO cuja solução está associada a uma condição inicial descrito como:

$$y(x_o) = y_o \quad (3)$$

Em que x_o é um número pertencente a um intervalo I e y_o é um número Real. Dessa forma, o problema, de modo geral, assume seguinte característica:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4)$$

$$y(x_o) = y_o \quad (5)$$

Geometricamente, o PVI almeja uma solução para a equação diferencial que passe pelo ponto (x_o, y_o) em um intervalo I , ou seja, escolhe, dentre uma família de soluções que uma EDO pode ter, a que satisfaça a condição inicial.

2.2 Métodos numéricos para resolver EDOs

Há diversos métodos para encontrar soluções de equações diferenciais, todavia, eles possuem aspectos em comum, tendo em vista que, dado um PVI, segundo [2], construímos uma partição do intervalo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, que serão igualmente espaçadas, ou seja, terá amplitude: $x_{i+1} - x_i = h, i = 0, 1, \dots$, e calculamos as aproximações $y_i \cong y(x_i)$ nestes pontos, usando informações anteriores.

Ainda segundo [2], para calcular y_i usamos apenas y_{i-1} teremos um *método de passo simples* ou *passo único*. Porém, se usarmos mais valores, teremos um *método de passo múltiplo*.

Os métodos que serão abordados no presente estudo são do tipo *passo único* e, como já supracitados, são os métodos de Euler, Heun e Runge-Kutta.

2.2.1 Expansão em séries de Taylor

Antes de expor sobre os métodos numéricos, é cabível descrever sobre o polinômio de Taylor. De acordo com [8], a fórmula de Taylor consiste num método de aproximação de uma função por um polinômio, com um erro possível e estimado.

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas até ordem n num ponto c do intervalo I . O polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto c , denotado por $P_n(x)$, é dado pela Equação 6.

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n \quad (6)$$

A partir de um polinômio de Taylor de grau n de uma função $f(x)$, o resto ($R(x)$) é definido como a Equação 7:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (7)$$

Quanto menor o resto, mais $P_n(x)$ se aproxima de $f(x)$, portanto, melhor se torna a aproximação de $f(x)$.

2.2.1 Método de Euler

De acordo com [9], O método mais simples de passo múltiplo é obtido fazendo $n = 1$ no método de Taylor de ordem n , obtém-se então, o método de Euler, o qual, de acordo com [2], consiste em: como conhecemos x_0 e $y_0 = (x_0)$, então sabemos calcular $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Assim, a reta $r_0(x)$ que passa por (x_0, y_0) com coeficiente angular $y'(x_0)$ é conhecida (Equação 8):

$$r_0(x) = y_0 + (x - x_0)y'(x_0) \quad (8)$$

O termo “ $(x - x_0)$ ” é chamado de amplitude e é denotado por “ h ”, ou seja, o h é a diferença de um x_{k+1} por um x_k , em que k é o índice da variável x . Portanto, h de uma forma mais geral é representado na Equação 9:

$$h = x_{k+1} - x_k \quad (9)$$

O raciocínio é repetido inúmeras vezes, e assim, tem-se a formula geral do método de Euler (Equação 10):

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Graficamente, para um ponto que está na curva, o método se mostra da seguinte forma:

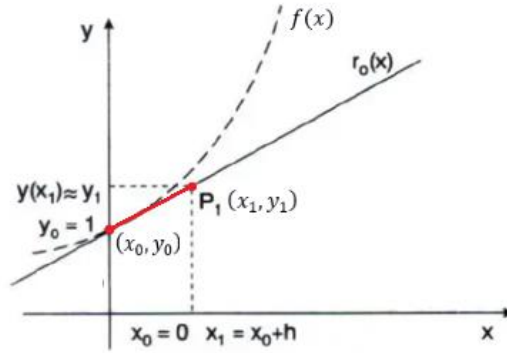


Figura 1: Exemplo da construção de uma solução pelo método de Euler, onde $r_0(x)$ é a reta tangente a $f(x)$ no ponto (x_0, y_0) . Adaptado de [2]

2.2.2 Método de Heun

Segundo [1], o método de Heun busca melhorar a estimativa da inclinação de $r_0(x)$ e envolve a determinação de duas derivadas para o intervalo, sendo uma no ponto inicial e outra no ponto final. Então, é feita a média das duas derivadas para obter uma estimativa melhorada da inclinação do intervalo completo.

Portanto, em termos matemáticos, o método de Heun, também conhecido por método de Euler melhorado, é apresentado na Equação 11, a qual relaciona o valor da função em um determinado ponto com a média aritmética das derivadas.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} h \quad (11)$$

Graficamente, o método pode ser descrito nas Figuras 2.a e 2.b, onde são calculadas as inclinações nos pontos (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}) e depois é extraída a média aritmética dessas duas inclinações para compor uma nova inclinação e ser posta na Equação 11.

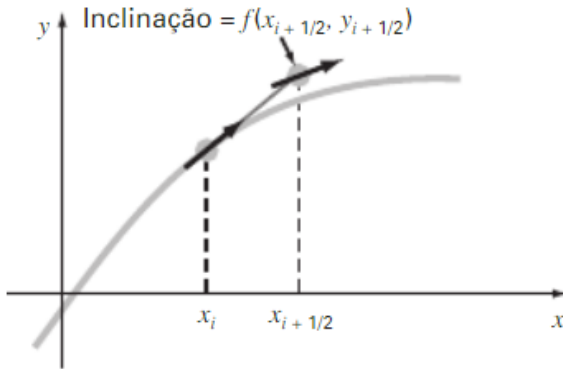


Figura 2.a: Gráfico do método de Heun (Encontrando as inclinações dos extremos).[1]

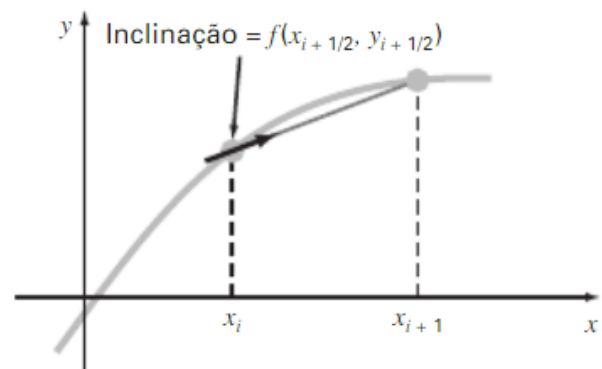


Figura 2.b: Gráfico do método de Heun (após a média aritmética das derivadas). [1]

2.2.3 Método de Runge-Kutta

O método consiste na comparação da expansão de Taylor com y_{i+1} . A fórmula geral é descrita pela equação a seguir.

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (12)$$

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (13)$$

Onde ϕ é a função incremento, os $a's$ são constantes e os $k's$ são:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (14)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad (15)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \quad (16)$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-2,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \quad (17)$$

Os $q's$ e $p's$ são constantes e o índice n indica a ordem do método. Tomando n como um, tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (k_1 \cdot a_1) \quad (18)$$

E comparando com a expansão de Taylor de ordem 1:

$$y_{i+1} = y_i(x_i) + h \cdot f(x_i, y_i) + O(h) \quad (19)$$

Em que $O(h)$ é o erro de truncamento local. Então, analisando as Equações 14, 18 e 19, conclui-se que $a_1 = 1$ e a expressão final é exatamente o método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (20)$$

Para encontrar o método de Runge-Kutta em ordens superiores, o procedimento é similar ao descrito anteriormente, entretanto, para achar as expressões para $k's$ de ordem maior que um, pode ser necessário expandi-los em série de Taylor para mais de uma variável e truncar a expressão obtida.

Segundo [3], dentre os métodos de Runge-Kutta, o mais popular é o método de quarta ordem. A versão mais difundida do método de quarta ordem é descrita como:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (21)$$

Em que:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (22)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (23)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \quad (24)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad (25)$$

É importante salientar que esse método utiliza, diferente do de Heun, uma média ponderada para se encontrar a melhor inclinação da reta. Cada k_i ($i = 1, 2, 3, 4$) representa uma inclinação de reta.

2.3 Circuitos RC e RL

2.3.1 Capacitores

De acordo com [6], um capacitor é um sistema constituído por dois condutores separados por um isolante (ou imersos no vácuo). Em quase todas as aplicações práticas, cada condutor possui, inicialmente, carga líquida igual a zero e há transferência de elétrons de um condutor para o outro; dizemos, nesse caso, que o capacitor está sendo *carregado*.

2.3.1.1 Processo de Carga de Capacitores

Um circuito contém uma fonte de força eletromotriz (**fem**) ε , um resistor de resistência R e um capacitor de capacitância C . Esse circuito é responsável por carregar o capacitor quando a chave está fechada. A carga sobre o capacitor aumenta com o tempo, enquanto a corrente diminui.

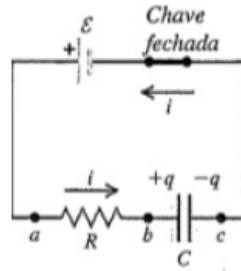


Figura 3: Circuito RC para carga. Adaptado de [6]

Para construir uma expressão que relacione todas as diferenças de potenciais no circuito, utiliza-se a Lei das malhas de Kirchhoff, a qual afirma que, segundo [6], a soma algébrica de todas as diferenças de potencial através de uma malha, incluindo os elementos resistivos e a **fem** de todas as fontes, é necessariamente igual a zero. Para um maior aprofundamento acerca da temática, sugere-se a leitura de [6].

A aplicação dessa lei para o circuito em questão resulta em:

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad (26)$$

A expressão relaciona a **fem** da fonte, a diferença de potencial (ddp) no Resistor e a diferença de potencial no Capacitor. Entretanto, tanto a corrente i quanto a carga do capacitor q variam em função do tempo. Além disso, a corrente i é descrita pela Equação 27:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (27)$$

Com isso, monta-se a seguinte EDO de primeira ordem:

$$\frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} - \frac{dq}{dt} = 0 \quad (28)$$

Sabe-se que a carga no instante zero é nula, pois o capacitor ainda está descarregado, ou seja, matematicamente

tem-se o PVI:

$$q(0) = 0 \quad (29)$$

Que é uma EDO com um Problema de Valor Inicial cuja solução, de acordo com [6], pelo método analítico é mostrada na Equação 30, e que Q é a carga máxima que o capacitor adquire:

$$q(t) = C \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (30)$$

A carga do capacitor cresce exponencialmente e tende à carga final Q . Graficamente, tem-se:

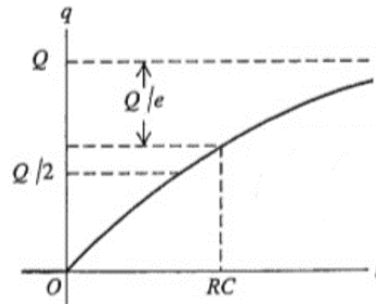


Figura 4: Gráfico da carga versus tempo para carga de um capacitor. Adaptado de [6]

2.3.1.2 Processo de Descarga de Capacitores

Nesse caso, o circuito é composto apenas com o Capacitor de capacitância C e o resistor de resistência R , que tem como objetivo descarregar o capacitor. Quando a chave é fechada, tanto a carga, como a corrente diminuem com o passar do tempo.

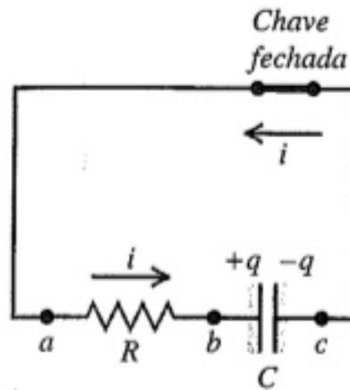


Figura 5: Circuito RC para descarga. Adaptado de [6]

A nova EDO que surge é similar à Equação 28, todavia, agora não há a fonte, resultando assim em:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (31)$$

Dessa vez, para o PVI, sabe-se que no instante inicial, o capacitor está com sua carga máxima Q , ou seja:

$$q(0) = C \varepsilon = Q \quad (32)$$

Portanto, a sua solução analítica, segundo [6], é da forma:

$$q(t) = Qe^{-t/RC} \quad (33)$$

A carga do capacitor decresce exponencialmente no processo de descarga do capacitor e tende à zero. Em termos gráficos, obtêm-se:

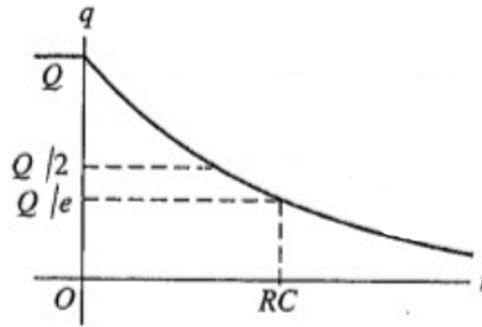


Figura 6: Gráfico da carga *versus* tempo para descarga de um capacitor. Adaptado de [6]

Logo, tanto para carregar quanto para descarregar um capacitor, o seu gráfico da Carga *versus* Tempo deve ter um comportamento exponencial, porém, um decrescente e outro crescente, respectivamente.

2.3.2 Indutores

Ademais, existe outro componente eletrônico de notória importância, denominados indutores. De acordo com [6], o objetivo de um indutor é criar uma corrente que se oponha a variação da corrente no circuito. Um indutor colocado em um circuito de corrente contínua ajuda a manter a corrente constante, apesar de eventuais flutuações da *fem* aplicada; em um circuito de corrente alternada, o indutor pode ser usado para suprimir variações da corrente que sejam mais rápidas que as desejadas.

Neste trabalho, serão analisados dois casos: No Caso 1, a presença da fonte no circuito faz com que o valor da corrente saia de um valor nulo para um diferente de zero; já no Caso 2, a retirada da fonte é responsável por reduzir a corrente de um certo valor para zero. Em ambos os casos, há variação de corrente, portanto o indutor tende a se opor a esse fenômeno.

2.3.2.1 Indutores (Caso 1)

O indutor de indutância L é conectado em um circuito contendo: uma fonte $\mathcal{E}$ e um resistor de resistência R .

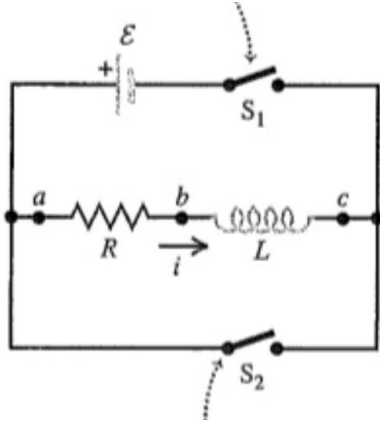


Figura 7.a: Circuito RL. Adaptado de [6]

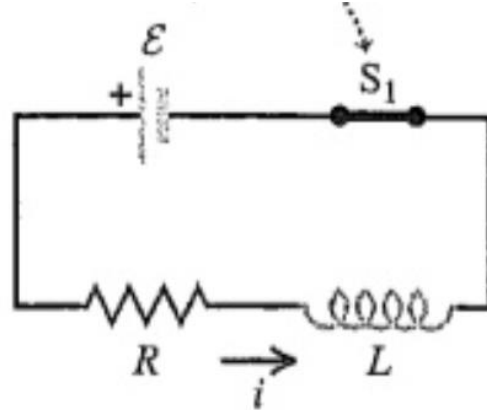


Figura 7.b: Circuito RL com a chave S_1 acionada. Adaptado de [6]

Em um primeiro momento, a chave S_1 da Figura 7.a é ligada, resultando no circuito da Figura 7.b, e uma corrente i , inicialmente nula, começa a aumentar no circuito com o passar do tempo.

Então, através da aplicação da Lei de Kirchhoff das malhas, obtêm-se:

$$\mathcal{E} - iR - L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{L} - i \left(\frac{R}{L} \right) - \frac{di}{dt} = 0 \quad (34)$$

A qual tem seu PVI como:

$$i(0) = 0 \quad (35)$$

E sua solução analítica, de acordo com [6], culmina em na Equação 36, onde I é a corrente máxima:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \right) = I \left(1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \right) \quad (36)$$

A corrente do circuito irá aumentar exponencialmente de zero para a corrente máxima I . Em termos gráficos, tem-se:

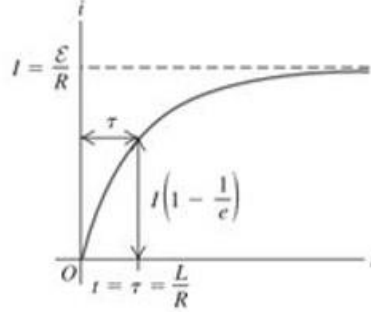


Figura 8: Gráfico da corrente *versus* tempo para circuito RL [6]

2.3.2.2 Indutores (Caso 2)

Agora, em determinado momento após o circuito ter atingido sua corrente máxima, desliga-se a chave S_1 e liga-se a chave S_2 rapidamente. Desse modo, não há mais fonte, restando apenas o resistor R e o indutor L . O circuito equivalente está mostrado a seguir:

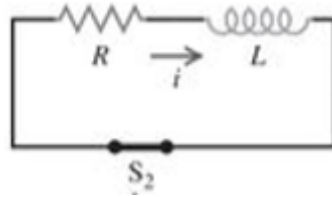


Figura 9: Circuito RL com a chave S_2 acionada [6]

A EDO, por sua vez, sofre uma sutil alteração: ε se torna nulo. Assim, ocasionando em:

$$iR + L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow i \left(\frac{R}{L} \right) + \frac{di}{dt} = 0 \quad (37)$$

A qual tem seu PVI:

$$i(0) = \frac{\varepsilon}{R} = I_0 \quad (38)$$

E sua solução, segundo [6], é da forma:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} = I_0 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \quad (39)$$

A corrente do circuito irá decrescer exponencialmente com o passar do tempo, tendendo a zero, resultando no seguinte gráfico:

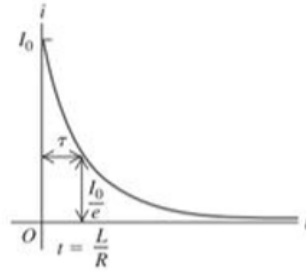


Figura 10: Gráfico da corrente *versus* tempo para circuito RL com a chave S_2 acionada [6]

Desse modo, a forma com que a corrente varia em um circuito RL é de forma exponencial para ambos casos. Contudo, no Caso 1, a corrente cresce de zero até tender a corrente máxima, enquanto que no Caso 2, a corrente parte de um valor máximo e tende a zero. A presença do indutor faz com que as variações de correntes não se deem de modo instantâneo, mas sim, passem por um regime transitório.

3. METODOLOGIA

Com o intuito de estudar a eficiência dos métodos numéricos de Euler, Heun e Runge-Kutta frente às soluções obtidas analiticamente, foram desenvolvidos algoritmos para solucionar os Problemas Teóricos numericamente e compará-los com a solução analítica.

Essa comparação foi feita a partir dos conceitos de *Erro Médio Absoluto* e *Erro Máximo Relativo*.

$$\text{Erro Médio Absoluto} = \text{Média} (| \text{Solução numérica} - \text{Solução analítica} |) \quad (40)$$

$$\text{Erro Médio Relativo} = \text{Média} \left(\frac{| \text{Solução numérica} - \text{Solução analítica} |}{\text{Solução Analítica}} \right) \quad (41)$$

Os valores encontrados foram utilizados para compor tabelas.

Além disso, os intervalos de tempo considerados para a plotagem dos gráficos dos Problemas Teóricos foram repartidos em diferentes quantidades de partições n . Esses valores foram de: 20, 200, 2000 e 20000 partições. O intuito dessa variação era observar se houvessem mudança nos *Erros* ao aumentar a quantidade de repartições de um intervalo de tempo para um mesmo método numérico.

A IDE (Ambiente de Desenvolvimento Integrado) utilizada para a construção dos algoritmos foi o Scilab 6.1.0, que é um software científico para a computação numérica, ele possui diversas ferramentas que facilitam o trabalho com problemas matemáticos, como por exemplo, vetores, matrizes, álgebra linear, estatística, etc. O algoritmo foi executado em um computador com 8,00 GB de memória RAM, um processador Intel® Core™ i5-4570 e com o sistema operacional Windows 10 versão 20H2.

Para os problemas 1 e 2, o intervalo considerado nas simulações foi de 0 a 4 segundos. Já para os problemas 3 e 4, o intervalo considerado nas simulações foi de 0 a 0,003 segundos.

3.1 Problemas Teóricos

Para verificar a aplicação dos métodos, serão considerados quatro problemas, que serão detalhados a seguir.

Problema 1: Um resistor de $5,0k\Omega$ conectado em série com um capacitor cuja capacitância é de $100,0\mu F$ e uma bateria de $1,0V$. No tempo inicial o capacitor está descarregado.

$$\frac{\varepsilon}{R} - \frac{Q}{RC} - \frac{dQ}{dt} = 0 \rightarrow \frac{1V}{5k\Omega} - \frac{Q}{(5k\Omega)(100,0\mu F)} - \frac{dQ}{dt} = 0 \rightarrow 200\mu(A) - 2(s^{-1})Q - \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (42)$$

$$Q(0) = 0 \quad (43)$$

Problema 2: Após um longo período de tempo, o capacitor do “Problema 1” encontra-se carregado, a bateria é retirada e trocada por uma chave fechada, restando apenas o capacitor em série com resistor. Carga máxima é de $100\mu C$.

$$\frac{Q}{RC} + \frac{dQ}{dt} = 0 \rightarrow \frac{Q}{(5k\Omega)(100,0\mu F)} + \frac{dQ}{dt} = 0 \rightarrow 2(s^{-1})Q + \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (44)$$

$$Q(0) = \varepsilon \cdot C = 1V \cdot 100\mu F = 100\mu C \quad (45)$$

Problema 3: Um resistor de 160Ω é conectado em série a um indutor de indutância 69 mH e uma bateria de 12V.

$$\frac{\varepsilon}{L} - i\left(\frac{R}{L}\right) - \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \frac{12V}{69mH} - i\left(\frac{160\Omega}{69mH}\right) - \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \left(\frac{4 \times 10^3}{23}\right)\left(\frac{A}{s}\right) - i\left(\frac{160 \times 10^3}{69}\right)(s^{-1}) - \frac{di}{dt} = 0 \quad (46)$$

$$i(0) = 0 \quad (47)$$

Problema 4: Após um longo período de tempo, indutor do “Problema 3” atingiu a sua corrente máxima, a bateria é retirada e trocada por uma chave fechada, restando somente o indutor e o resistor. Corrente máxima de 75mA.

$$i\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow i\left(\frac{160\Omega}{69mH}\right) + \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow i\left(\frac{160 \times 10^3}{69}\right)(s^{-1}) + \frac{di}{dt} = 0 \quad (48)$$

$$i(0) = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{12V}{160\Omega} = 75mA \quad (49)$$

3.2 Algoritmos

A seguir, serão apresentados pseudo-algoritmos dos métodos numéricos de Euler, Heun e Runge-Kutta.

Algoritmo 1 - Método de Euler	
Declare	
1 - f	(EDO dos problemas em função da carga ou corrente)
2 - $f_{analitica}$	(Solução analítica em função do tempo)
3 - t_0	(tempo inicial)
4 - t_f	(tempo final)
5 - q_0 ou i_0	(carga ou corrente inicial, respectivamente)
6 - n	(número de repartições)
7 - h	(valor do passo)
8 - p	(contador)
9 - $v()$	(vetor com os valores das cargas ou corrente)
10 - $t()$	(vetor com os valores do tempo)
11 - EA	(Erro Médio absoluto)
12 - ER	(Erro Médio relativo)
Inicializar valores	
13 - $p \leftarrow 2$	
14 - $v(1) \leftarrow q(0)$ para o capacitor ou $i(0)$ para o indutor	
15 - $h = \frac{t_f - t_0}{n}$	
16 - $t(1) \leftarrow t_0$	
Cálculo do método	
18 - Enquanto $p < n + 2$ faça	
19 - $v(k) = v(k - 1) + h * (f(v(k - 1)))$;	
20 - $t(p) = t(p - 1) + h$;	
21 - $p = p + 1$;	
22 - Fim Enquanto	
Cálculo dos Erros e plotagem dos gráficos	
23 - Calcule e Mostre EA e ER	
24 - Plot f e $f_{analitica}$	

No método de Euler, os parâmetros que compõe os vetores $t()$ e $v()$, bem como o passo h , são inicializados (linha 13 até 16) e logo em seguida, dentro do laço (linha 18 até 22), é calculado iterativamente os valores do tempo $t()$, a EDO f e os parâmetros da função aproximada $v()$ que compõem o método propriamente dito. A cada repetição, o tempo é acrescido do passo h e armazenado em $t()$ até que seja atingido o tempo final t_f . Os vetores $t()$ e $v()$ são utilizados para plotar os gráficos e para calcular o **Erro Médio Absoluto** e o **Erro Médio Relativo** (linhas 23 e 24). Todos esses procedimentos são repetidos para cada valor n de repartições.

Algoritmo 2 - Método de Heun

Declare

- 1 - f (EDO dos problemas em função da carga ou corrente)
- 2 - $f_{analitica}$ (Solução analítica em função do tempo)
- 3 - t_0 (tempo inicial)
- 4 - t_f (tempo final)
- 5 - q_0 ou i_0 (carga ou corrente inicial, respectivamente)
- 6 - n (número de repartições)
- 7 - h (valor do passo)
- 8 - p (contador)
- 9 - $k1, k2, k$ (inclinações das retas do método)
- 10 - $v()$ (vetor com os valores das cargas ou corrente)
- 11 - $t()$ (vetor com os valores do tempo)
- 12 - EA (Erro Médio absoluto)
- 13 - ER (Erro Médio relativo)

Inicializar valores

- 14 - $p \leftarrow 2$
- 15 - $v(1) \leftarrow q(0)$ para o capacitor ou $i(0)$ para o indutor
- 16 - $h = \frac{t_f - t_0}{n}$
- 17 - $t(1) \leftarrow t_0$

Cálculo do método

- 18 - Enquanto $p < n + 2$ faça
- 19 - $k1 = f(v(p - 1));$
- 20 - $k2 = f(v(p - 1) + k1 * h);$
- 21 - $k = (k1 + k2)/2;$
- 22 - $v(p) = v(p - 1) + (k * h);$
- 23 - $t(p) = t(p - 1) + h;$
- 24 - $p = p + 1;$
- 25 - Fim Enquanto

Cálculo dos Erros e plotagem dos gráficos

- 26 - Calcule e Mostre EA e ER
- 27 - Plot f e $f_{analitica}$

No método de Heun, os parâmetros que compõe os vetores $t()$ e $v()$, bem como o passo h , são inicializados (linha 14 até 17) e logo em seguida, dentro do laço (linha 18 até 25), é calculado iterativamente os valores do tempo $t()$, a EDO f , a inclinação k como a média aritmética entre $k1$ e $k2$, bem como os parâmetros da função aproximada $v()$ que compõem o método propriamente dito. A cada repetição, o tempo é acrescido do passo h e armazenado em $t()$ até que seja atingido o tempo final t_f . Os vetores $t()$ e $v()$ são utilizados para plotar os gráficos e para calcular o **Erro Médio Absoluto** e o **Erro Médio Relativo** (linhas 26 e 27). Todos esses procedimentos são repetidos para cada valor n de repartições.

Algoritmo 3 - Método de Runge-Kutta

Declare

```

1 -  $f$  (EDO dos problemas em função da carga ou corrente )
2 -  $f_{analitica}$  (Solução analítica em função do tempo)
3 -  $t_0$  (tempo inicial)
4 -  $t_f$  (tempo final)
5 -  $q_0$  ou  $i_0$  (carga ou corrente inicial, respectivamente)
6 -  $n$  (número de repartições)
7 -  $h$  (valor do passo)
8 -  $p$  (contador)
9 -  $k_1, k_2, k_3, k_4$  e  $k$  (inclinações das retas do método)
10 -  $v()$  (vetor com os valores das cargas ou corrente)
11 -  $t()$  (vetor com os valores do tempo)
12 -  $EA$  (Erro Médio absoluto)
13 -  $ER$  (Erro Médio relativo)

```

Inicializar valores

```

14 -  $p \leftarrow 2$ 
15 -  $v(1) \leftarrow q(0)$  para o capacitor ou  $i(0)$  para o indutor
16 -  $h = \frac{t_f - t_0}{n}$ 
17 -  $t(1) \leftarrow t_0$ 

```

Cálculo do método

```

18 - Enquanto  $p < n + 2$  faça
19 -    $k_1 \leftarrow f(v(p-1))$ ;
20 -    $k_2 \leftarrow f(v(p-1) + k_1 * h/2)$ ;
21 -    $k_3 \leftarrow f(v(p-1) + k_2 * h/2)$ ;
22 -    $k_4 \leftarrow f(v(p-1) + k_3 * h)$ ;
23 -    $k \leftarrow (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4)/6$ ;
24 -    $v(p) \leftarrow v(p-1) + k * h$ ;
25 -    $t(p) \leftarrow t(p-1) + h$ ;
26 -    $p \leftarrow p + 1$ ;
27 - Fim Enquanto

```

Cálculo dos Erros e plotagem dos gráficos

```

28 - Calcule e Mostre  $EA$  e  $ER$ 
29 - Plot  $f$  e  $f_{analitica}$ 

```

No método de Runge-Kutta, os parâmetros que compõe os vetores $t()$ e $v()$, bem como o passo h , são inicializados (linha 14 até 17) e logo em seguida, dentro do laço (linha 18 até 27), é calculado iterativamente os valores do tempo $t()$, a EDO f , a inclinação k como a média ponderada entre k_1, k_2, k_3, k_4 , bem como os parâmetros da função aproximada $v()$ que compõem o método propriamente dito. A cada repetição, o tempo é acrescido do passo h e armazenado em $t()$ até que seja atingido o tempo final t_f . Os vetores $t()$ e $v()$ são utilizados para plotar os gráficos e para calcular o **Erro Médio Absoluto** e o **Erro Médio Relativo** (linhas 28 e 29). Todos esses procedimentos são repetidos para cada valor n de repartições.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1. Problema 1

A solução analítica é, de acordo com [6]:

$$Q(t) = Q \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = C \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{(5k)(100,0\mu)}} \right) = (100,0\mu)(1)(1 - e^{-t/(5k)(100,0\mu)}) = 100\mu(1 - e^{-2t}) \quad (50)$$

Os resultados calculados a partir dos métodos numéricos estão mostrados a seguir na forma de gráficos (Figuras 11, 12 e 13) e na Tabela 1.

Erro Médio Absoluto (C)				
n	h	Euler	Heun	Runge-Kutta
20	0,2	$2,49 \times 10^{-8}$	$4,35 \times 10^{-7}$	$3,49 \times 10^{-9}$
200	0,02	$2,49 \times 10^{-7}$	$3,40 \times 10^{-9}$	$2,73 \times 10^{-13}$
2000	0,002	$2,49 \times 10^{-8}$	$3,33 \times 10^{-11}$	$2,66 \times 10^{-17}$
20000	0,0002	$2,50 \times 10^{-9}$	$3,32 \times 10^{-13}$	$8,26 \times 10^{-19}$
Erro Médio Relativo (%)				
n	h	Euler	Heun	Runge-Kutta
20	0,2	$1,25 \times 10^{-5}$	$2,08 \times 10^{-2}$	$1,66 \times 10^{-4}$
200	0,02	$1,24 \times 10^{-3}$	$1,70 \times 10^{-5}$	$1,36 \times 10^{-9}$
2000	0,002	$1,24 \times 10^{-5}$	$1,67 \times 10^{-8}$	$1,33 \times 10^{-14}$
20000	0,0002	$1,25 \times 10^{-7}$	$1,66 \times 10^{-11}$	$4,13 \times 10^{-17}$

Tabela 1 – Resultados do Problema 1. [Fonte Autoral]

Graficamente:

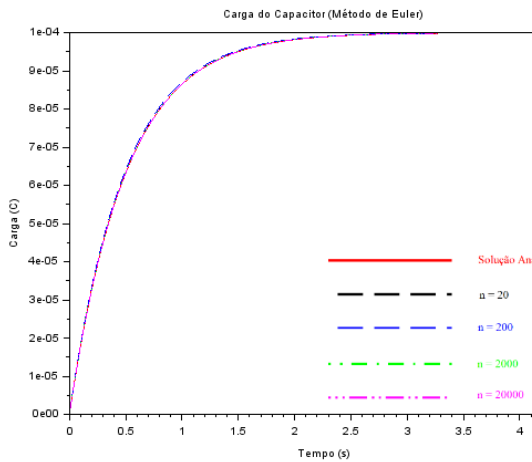


Figura 11 – Gráfico do método de Euler do Problema 1. [Fonte autoral]

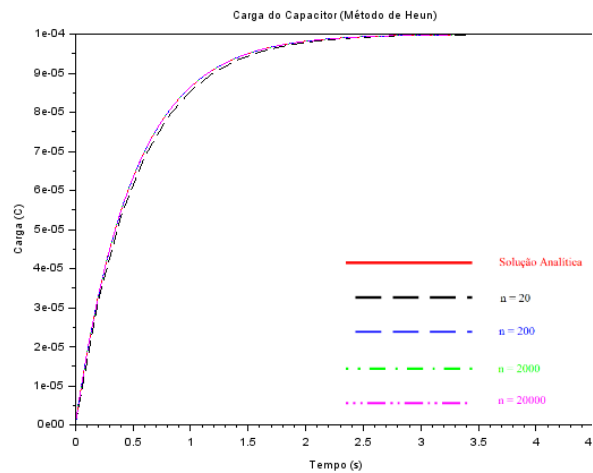


Figura 12 – Gráfico do método de Heun do Problema 1. [Fonte autoral]

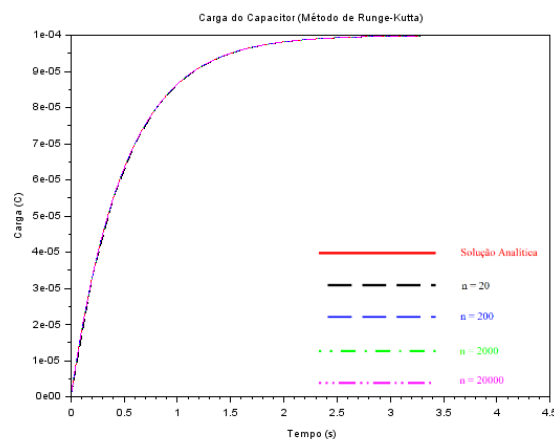


Figura 13– Gráfico do método de Runge-Kutta do Problema 1. [Fonte autoral]

Observa-se que, de acordo com os gráficos e tabelas expostos acima, para um mesmo passo h , os métodos obtiveram erros diferentes, mostrando a diferença na eficácia de cada um, ainda que graficamente as curvas pareçam indistinguíveis. O gráfico que mais se destacou dos demais foi o referente ao método de Heun para $n = 20$. Também os erros no método de Euler de $n = 20$ para $n = 200$ obtiveram uma redução, porém, para $n = 2000$, o erro obtido foi similar ao do $n = 20$, todavia, para $n = 20000$, o resultado foi menor que os demais. Um dos motivos que pode justificar tal comportamento é o fato de que os métodos se baseiam em valores anteriores para encontrar pontos ulteriores, desse modo, a utilização de poucas repartições pode gerar curvas mais destoantes. Além disso, ao se refinar ainda mais o passo, ou seja, aumentar o número de repartições, é possível notar que os **Erros** tendem a diminuir e que a função obtida numericamente se aproxima da analítica.

Apesar de que o método de Runge-Kutta apresentou **Erros** menores que os demais, houve um acontecimento que merece destaque: os **Erros** referentes ao método de Heun foram maiores que o do método de Euler para $n = 20$. Entretanto, para os valores de n maiores que 20, a tendência foi de que o método de Heun se aproximasse mais da solução analítica frente ao método de Euler, que é o esperado.

4.2. Problema 2

A solução analítica é, de acordo com [6]:

$$Q(t) = Q_0 \left(e^{-\frac{t}{RC}} \right) = C \varepsilon \left(e^{-\frac{t}{(5k)(100,0\mu)}} \right) = (100,0\mu)(1)(e^{-t/(5k)(100,0\mu)}) = 100\mu(e^{-2t}) \quad (51)$$

Os resultados calculados a partir dos métodos numéricos estão mostrados a seguir na forma de gráficos (Figuras 14, 15 e 16) e na Tabela 2.

Erro Médio Absoluto (C)				
n	h	Euler	Heun	Runge-Kutta
20	0,25	$2,58 \times 10^{-6}$	$5,96 \times 10^{-7}$	$7,39 \times 10^{-9}$
200	0,025	$2,50 \times 10^{-7}$	$4,30 \times 10^{-9}$	$5,40 \times 10^{-13}$
2000	0,0025	$2,50 \times 10^{-8}$	$4,18 \times 10^{-11}$	$5,22 \times 10^{-17}$
20000	0,00025	$2,50 \times 10^{-9}$	$4,16 \times 10^{-13}$	$5,20 \times 10^{-19}$
Erro Médio Relativo (%)				
n	h	Euler	Heun	Runge-Kutta
20	0,25	$1,27 \times 10^{-1}$	$2,83 \times 10^{-2}$	$3,52 \times 10^{-4}$
200	0,025	$1,25 \times 10^{-3}$	$2,14 \times 10^{-5}$	$2,69 \times 10^{-9}$
2000	0,0025	$1,25 \times 10^{-5}$	$2,09 \times 10^{-8}$	$2,61 \times 10^{-14}$
20000	0,00025	$1,25 \times 10^{-7}$	$2,08 \times 10^{-11}$	$2,60 \times 10^{-17}$

Tabela 2 – Resultados do Problema 2. [Fonte Autoral]

Graficamente:

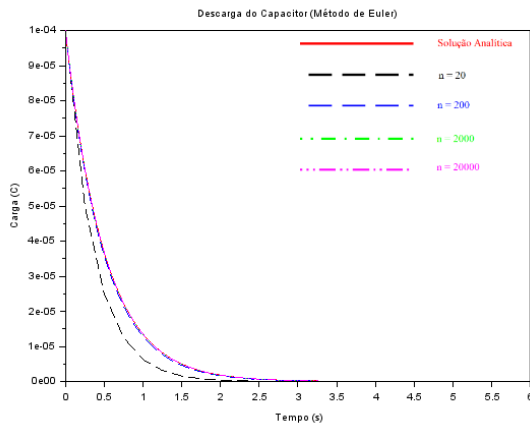


Figura 14 – Gráfico do método de Euler do Problema 2. [Fonte autoral]

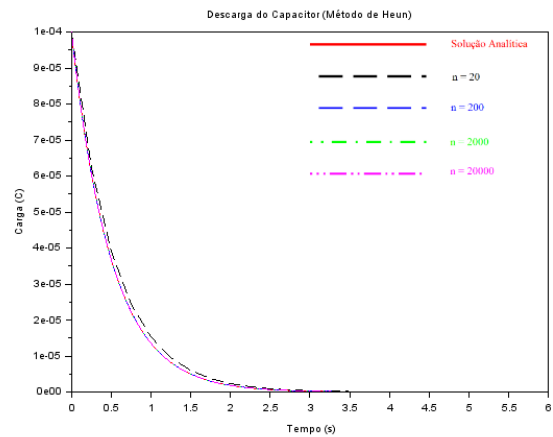


Figura 15– Gráfico do método de Heun do Problema 2. [Fonte autoral]

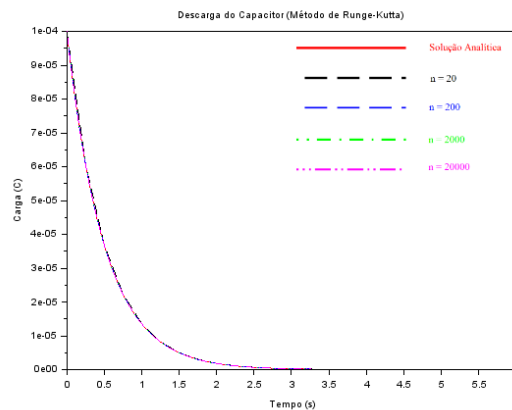


Figura 16 – Gráfico do método de Runge-Kutta do Problema 2. [Fonte autoral]

Observa-se que, de acordo com os gráficos e tabelas expostos acima, para um mesmo passo h , os métodos obtiveram erros diferentes, mostrando a diferença na eficácia de cada um, ainda que graficamente a maioria das curvas pareçam indistinguíveis. Os gráficos que mais se destoaram dos demais foram os referentes aos métodos de Heun e Euler para $n = 20$. Um dos motivos que pode justificar tal comportamento é o fato de que os métodos se baseiam em valores anteriores para encontrar pontos posteriores, desse modo, a utilização de poucas repartições pode gerar curvas mais destoantes. Além disso, ao se refinar ainda mais o passo, ou seja, aumentar o número de repartições, é possível notar que os **Erros** tendem a diminuir e que a função obtida numericamente se aproxima da analítica.

O método de Runge-Kutta apresentou os menores **Erros**, seguido de Heun e Euler, respectivamente.

4.3. Problema 3

A solução analítica é, de acordo com [6]:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}) = \frac{12}{160} \left(1 - e^{-\left(\frac{160}{69m}\right)t}\right) \approx 0,075(1 - e^{-(2,32k)t}) \quad (52)$$

Os resultados calculados a partir dos métodos numéricos estão mostrados a seguir na forma de gráficos (Figuras 17, 18 e 19) e na Tabela 3.

Erro Médio Absoluto (A)				
n	h	Euler	Heun	Runge-Kutta
20	0.0001	$1,88 \times 10^{-3}$	$2,71 \times 10^{-4}$	$1,65 \times 10^{-6}$
200	0.00001	$1,86 \times 10^{-4}$	$2,20 \times 10^{-6}$	$1,34 \times 10^{-10}$
2000	0.000001	$1,86 \times 10^{-5}$	$2,16 \times 10^{-8}$	$1,30 \times 10^{-14}$
20000	0.0000001	$1,86 \times 10^{-6}$	$2,16 \times 10^{-10}$	$8,95 \times 10^{-16}$
Erro Médio Relativo (%)				
n	h	Euler	Heun	Runge-Kutta
20	0.0001	$1,20 \times 10^{-1}$	$1,72 \times 10^{-2}$	$1,05 \times 10^{-4}$
200	0.00001	$1,27 \times 10^{-3}$	$1,46 \times 10^{-5}$	$8,88 \times 10^{-10}$
2000	0.000001	$1,24 \times 10^{-5}$	$1,44 \times 10^{-8}$	$8,68 \times 10^{-15}$
20000	0.0000001	$1,24 \times 10^{-7}$	$1,44 \times 10^{-11}$	$5,98 \times 10^{-17}$

Tabela 3 – Resultados do Problema 3. [Fonte autoral]

Graficamente:

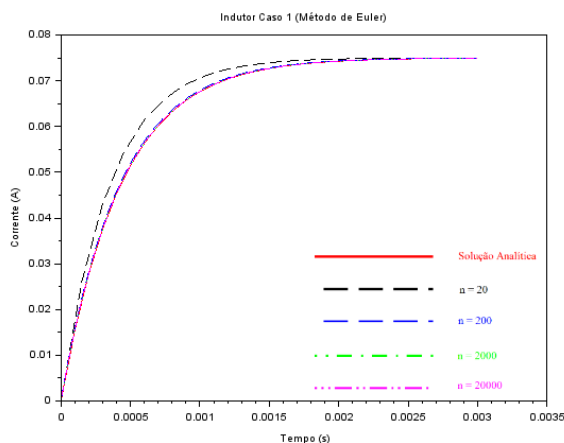


Figura 17 – Gráfico do método de Euler do Problema 3. [Fonte autoral]

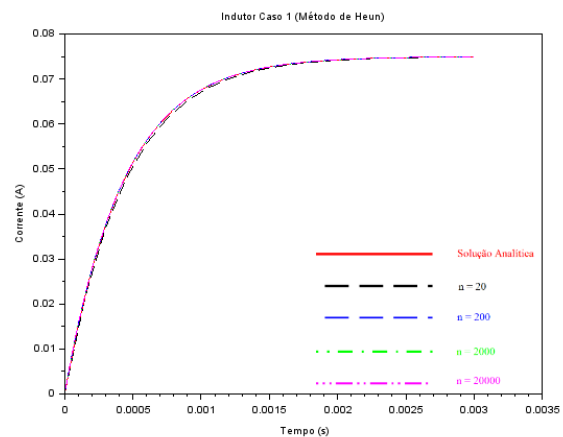


Figura 18 – Gráfico do método de Heun do Problema 3. [Fonte autoral]

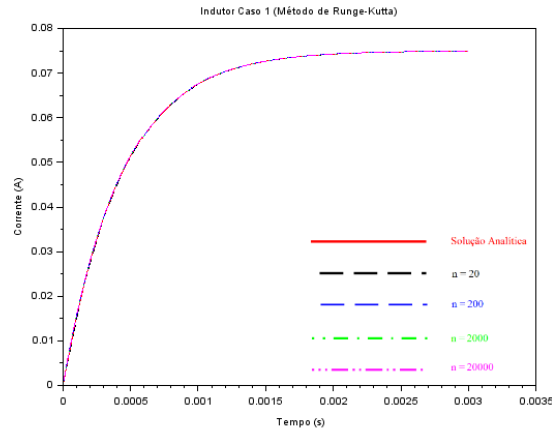


Figura 19 – Gráfico do método de Runge-Kutta do Problema 3. [Fonte autoral]

Observa-se que, de acordo com os gráficos e tabelas expostos acima, para um mesmo passo h , os métodos obtiveram erros diferentes, mostrando a diferença na eficácia de cada um, ainda que graficamente a maioria das curvas pareçam indistinguíveis. O gráfico que mais se destoa dos demais foi o referente ao método de Euler para $n = 20$. Um dos motivos que pode justificar tal comportamento é o fato de que os métodos se baseiam em valores anteriores para encontrar pontos ulteriores, desse modo, a utilização de poucas repartições pode gerar curvas mais destoantes. Além disso, ao se refinar ainda mais o passo, ou seja, aumentar o número de repartições, é possível notar que os **Erros** tendem a diminuir e que a função obtida numericamente se aproxima da analítica.

O método de Runge-Kutta apresentou os menores **Erros**, seguido de Heun e Euler, respectivamente.

4.4. Problema 4

A solução analítica é, de acordo com [6]:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{L} \left(e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \right) = \frac{12}{160} \left(e^{-\left(\frac{160}{69m}\right)t} \right) \approx 0,075(e^{-(2,32k)t}) \quad (53)$$

Os resultados calculados a partir dos métodos numéricos estão mostrados a seguir na forma de gráficos (Figuras 20, 21 e 22) e na Tabela 4.

Erro Médio Absoluto (A)				
n	h	Euler	Heun	Runge-Kutta
20	0.0001	$1,88 \times 10^{-3}$	$2,71 \times 10^{-4}$	$1,65 \times 10^{-6}$
200	0.00001	$1,86 \times 10^{-4}$	$2,20 \times 10^{-6}$	$1,34 \times 10^{-10}$
2000	0.000001	$1,86 \times 10^{-5}$	$2,16 \times 10^{-8}$	$1,30 \times 10^{-14}$
20000	0.0000001	$1,86 \times 10^{-6}$	$2,16 \times 10^{-10}$	$9,03 \times 10^{-16}$
Erro Médio Relativo (%)				
n	h	Euler	Heun	Runge-Kutta
20	0.0001	$1,20 \times 10^{-1}$	$1,72 \times 10^{-1}$	$1,05 \times 10^{-4}$
200	0.00001	$1,23 \times 10^{-3}$	$1,46 \times 10^{-5}$	$8,87 \times 10^{-10}$
2000	0.000001	$1,24 \times 10^{-5}$	$1,44 \times 10^{-8}$	$8,67 \times 10^{-15}$
20000	0.0000001	$1,24 \times 10^{-7}$	$1,44 \times 10^{-11}$	$6,02 \times 10^{-17}$

Tabela 4 – Resultados do Problema 4. [Fonte Autoral]

Graficamente:

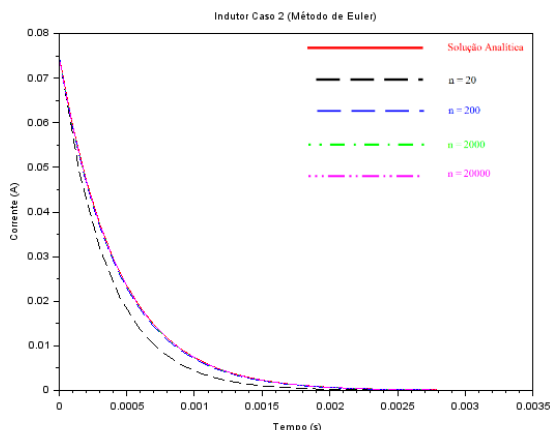


Figura 20 – Gráfico do método de Euler do Problema 4. [Fonte autoral]

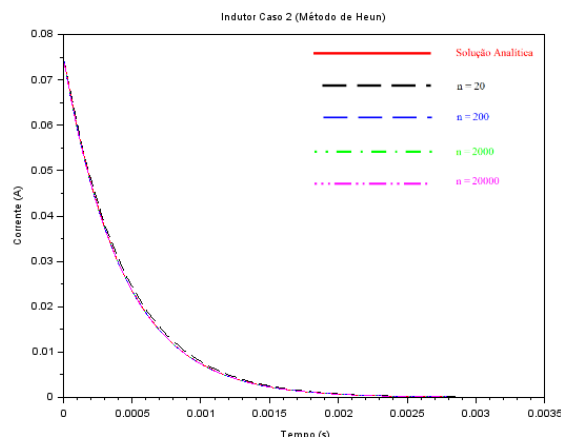


Figura 21 – Gráfico do método de Heun do Problema 4. [Fonte autoral]

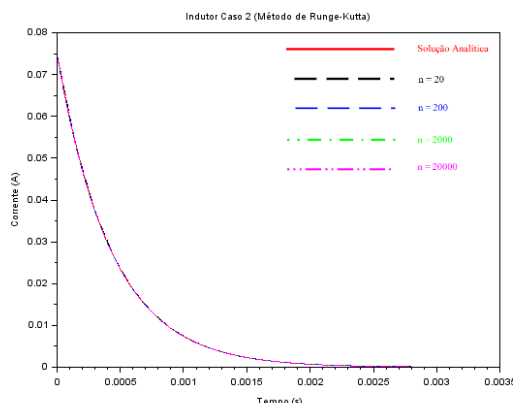


Figura 22 – Gráfico do método de Runge-Kutta do Problema 4. [Fonte autoral]

Observa-se que, de acordo com os gráficos e tabelas expostos acima, para um mesmo passo h , os métodos obtiveram erros diferentes, mostrando a diferença na eficácia de cada um, ainda que graficamente a maioria das curvas pareçam indistinguíveis. Os gráficos que mais se destoaram dos demais foram os referentes aos métodos de Heun e Euler para $n = 20$, o primeiro contendo pontos mais discrepantes das demais curvas com n 's maiores, e o segundo com pontos levemente discrepantes. Um dos motivos que pode justificar tal comportamento é o fato de que os métodos se baseiam em valores anteriores para encontrar pontos ulteriores, desse modo, a utilização de poucas repartições pode gerar curvas mais destoantes. Além disso, ao se refinar ainda mais o passo, ou seja, aumentar o número de repartições, é possível notar que os **Erros** tendem a diminuir e que a função obtida numericamente se aproxima da analítica.

O método de Runge-Kutta apresentou os menores **Erros**, seguido de Heun e Euler, respectivamente.

5. CONCLUSÕES

Destarte, a partir da comparação da solução analítica e a utilização dos métodos numéricos para resolução de EDOs aplicados aos circuitos RC e RL, é notório que o método numérico que se mostrou mais próximo do método analítico no quesito menor **Erro Médio Absoluto** e menor **Erro Médio Relativo** para valores pequenos de h , foi o de Runge-Kutta, seguido do método de Heun e do de Euler, respectivamente. Esse fato, de certo modo, é esperado, tendo em vista que a própria construção desses métodos considera critérios diferentes. O método de Euler utiliza a expansão de Taylor de ordem 1 e admite que a inclinação da função em um ponto vale por todo o intervalo h para estimar um ponto seguinte, já o de Heun realiza uma média aritmética entre duas inclinações para realizar essa estimativa, enquanto que Runge-Kutta, por sua vez, faz uso da expansão de Taylor de ordem 4, o que tende a oferecer mais eficiência no que se refere a se aproximar da função analítica.

Um cenário de testes que merece destaque é o caso do problema 1, com $n = 20$, no qual o método de Heun

resultou em erros médios maiores que o método de Euler e também para $n = 20$ e $n = 2000$ no mesmo método, onde os valores dos erros foram similares. Este cenário provavelmente ocorreu devido ao comportamento particular da curva nos pontos discretizados, ou por erros numéricos (arredondamento, truncamento, representação numérica, capacidade computacional) que acabaram por favorecer o método de Euler. Ressalta-se que ao aumentar a discretização de pontos, a tendência esperada se confirmou com o método de Heun que obteve um desempenho superior ao de Euler.

Por fim, no decorrer destes dois últimos anos foi feito esse trabalho. Através dele foi possível aguçar determinados conhecimentos acerca do funcionamento e da eficácia dos métodos numéricos para resolução de EDOs. Ademais, a partir dos conhecimentos adquiridos, torna-se propício uma retomada futura da linha de pesquisa de modo a se trabalhar tanto com demais problemas inerentes ao ramo da Eletricidade (Como EDOs de segunda ordem, por exemplo), quanto, com métodos numéricos distintos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CHAPRA, Steven C.. Métodos Numéricos Para Engenharia. 5. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2008. 832 p.
- [2] RUGGERIO, Maria A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Afiliada, 2000. 395 p.
- [3] BARROSO, Leônidas Conceição et al. Cálculo Numérico: (com Aplicações). 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987. 384 p.
- [4] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R.. Equações Diferenciais. 3. ed. São: Afiliada, 2001. 473 p.
- [5] MEDONÇA, Pedro Thiago Vilela de. Comparativo entre os métodos numéricos de Euler, Heun e RungeKutta na resolução de problemas de valor inicial de primeira ordem. 2016. 56 f. TCC (Graduação) - Curso de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Angicos, 2016
- [6] YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A.. Física III: Eletromagnetismo. 12. ed. Rio de Janeiro: Pearson, 2009. 425 p.
- [7] SANTOS, Reginaldo J.. Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. 2011. 703 f. Curso de Matemática, Departamento de Matematica-Icex, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2011.
- [8] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mírian Buss. Cálculo A. 6. ed. Florianópolis: Pearson, 2006. 454 p.
- [9] FRANCO, Neide Bertoldi. Cálculo Numérico. São Paulo: Prentice Hall, 2006. 494 p.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA
Centro de Ciências Exatas e Naturais – CCEN

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Às 14:00 horas do dia sete de maio de dois mil e vinte e um, em plataforma de videoconferência do Google Meet, no endereço meet.google.com/hao-wfsu-qej, reuniu-se a Banca Examinadora de defesa de trabalho de conclusão de curso de autoria do aluno **Hugo Dias Giló**, aluno do curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia desta universidade, N° de matrícula **2018010648**, com o título “**ANÁLISE DIFERENCIAL DE CIRCUITOS RC E RL A PARTIR DOS MÉTODOS NUMÉRICOS DE EULER, HEUN E RUNGE-KUTTA**”. A Banca Examinadora ficou assim constituída por três membros: Prof. Matheus da Silva Menezes, presidente da banca e orientador do Trabalho de Conclusão de Curso; Prof. Dr. Stefeson Bezerra de Melo e Prof Dr. Taciano Amaral Sorrentino, como membros. Concluída a defesa, procedeu-se o julgamento pelos membros da banca examinadora, tendo o aluno obtido o status **APROVADO**. E para constar, eu, Matheus da Silva Menezes, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada pelos membros da banca examinadora, será assinada por todos.

Mossoró, 07 de maio de 2021.

Assinatura dos membros da Banca Examinadora.

MATHEUS DA SILVA Assinado de forma digital por
MATHEUS DA SILVA
MENEZES:03329300 MENEZES:03329300418
418 Dados: 2021.05.23 16:07:33
-03'00'

Prof. Dr. Matheus da Silva Menezes – UFERSA
Presidente e orientador

Prof. Dr. Stefeson Bezerra de Melo – UFERSA
Primeiro Membro

TACIANO AMARAL
SORRENTINO:04900824402

Digitally signed by TACIANO AMARAL SORRENTINO:04900824402
DN: CN=TACIANO AMARAL SORRENTINO:04900824402, OU=UFERSA
- Universidade Federal Rural do Semi-Árido, O=ICPEdu, C=BR
Reason: I am approving this document
Location: your signing location here
Date: 2021.05.23 20:27:08-03'00'
Foxit Reader Version: 10.1.4

Prof. Dr. Taciano Amaral Sorrentino – UFERSA
Segundo Membro